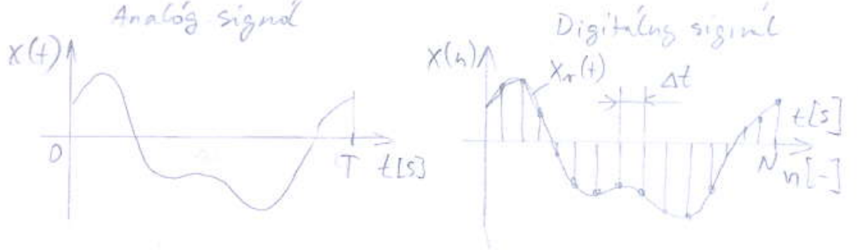
3. DIGITÁLNE SPRACOVANIE SIGNÁLU

- pri EMA je každá meraná veličina prevádzaná na elektr. signál, ktorý je zaznamenaný v digitálnej forme → hovoríme o <u>digitalizácii analógového signálu</u>

- vo matemat. ponímaní ide o diskretizáciu časovo spojitej fcie $x(t)$, t.j. získame diskrétnu fciu $X(n)$, ktorá reprezentuje postupnosť čísel. hodnôt pôvodnej fcie získaných v urč. diskrét. časových okamihoch.



← digitalizáciou analóg. signálu sa stráca časť informácií obsiahnutých v pôvodne nekonečnom rade údajov

- doba merania $T = 0,4\,s$
- počet vzoriek $N = 48$

vzorkovacia frekvencia: $\boxed{f_s = \frac{N}{T}} = \frac{48}{0,4} = 120$ Hz

perióda vzorkovania: $\boxed{\Delta t = \frac{1}{f_s}} = \frac{1}{120} = 8,\bar{3}.10^{-3}$ s
(čas. krok diskretizácie)

vyjadruje časový odstup dvoch po sebe idúcich vzoriek

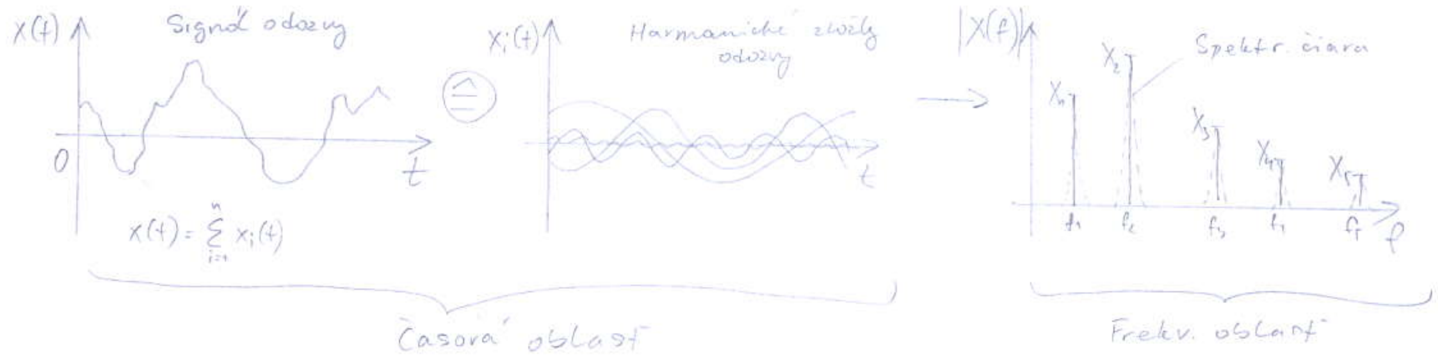
- každá diskrétna hodnota funkcie $x(n)$ reprezentuje diracov impulz veľkosti $x(n).\Delta t$. Na základe toho môžeme definovať tzv. vzorkovaciu fciu:

$x_v(t) = x(n)\Delta t\,\delta(t - n\Delta t)$ pre $n = 0, 1, 2, \dots N-1$

je odvodená zo spojitej fcie času → plynulá časová postupnosť

3.1 FOURIEROVA TRANSFORMÁCIA

- Časové priebehy meraných odoziev kmitania štruktúry majú vo všeobec. stochastický charakter → štruktúra kmitá pri viacerých frekvenciách naraz, pričom amplitúdy jednotl. príspevkov kmitania sa s časom menia
- keďže analyt. spracovanie takýchto signálov je veľmi náročné → riešením je ich transformácia do frekvenčnej oblasti, kde je každá harmonická zložka signálu vyjadrená jednou spektrálnou čiarou
- súbor týchto čiar tvorí frekvenčné spektrum signálu (spektrum)



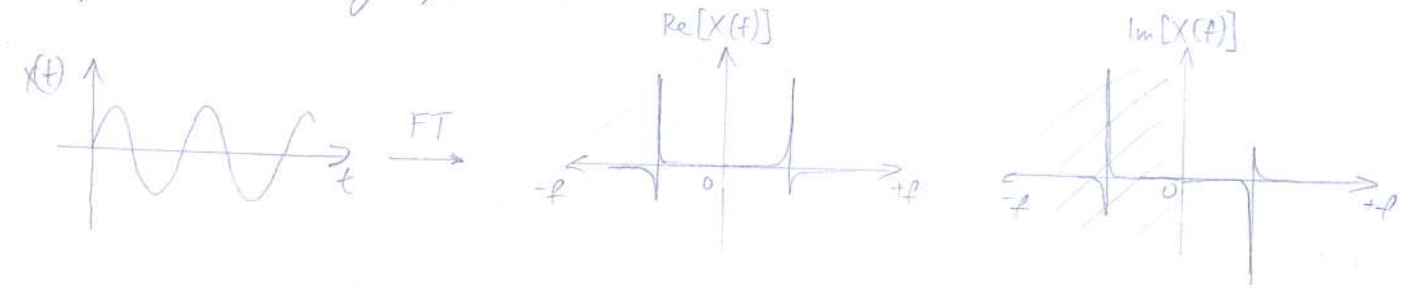
- na transformáciu signálu z čas. do frekv. oblasti používame Fourierovu transformáciu (pre spojitý signál)

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-i2\pi f t}\, dt = \mathcal{F}[x(t)]$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f)\, e^{i2\pi f t}\, df \quad \text{(inverzná)}$$

kde $X(f)$ je obojstranné komplexné amplitúdové spektrum časovej fcie $x(t)$

- toto spektrum má reál. a imag. zložku a tieto zložky sú symetrické vzhľadom k nulovej osi → ide o Hermitovskú symetriu, pričom sú hodnoty na kladnej a zápornej strane frekv. spektra komplexne združené
- preto sa pri analýze kmitania najčastejšie využíva iba jednostranné spektrum kladných frekvencií



- v prípade diskrétnych signálov je potrebné na určenie frekv. spektra použiť tzv. diskrétnu Fourierovu transformáciu DFT → diskrétne spektrum

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)\, e^{-i2\pi k \frac{n}{N}} \quad ; \quad k = 0, 1, 2 \ldots N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)\, e^{i2\pi k \frac{n}{N}} \quad ; \quad n = 0, 1, 2 \ldots N-1 \quad \text{(inverzná forma)}$$

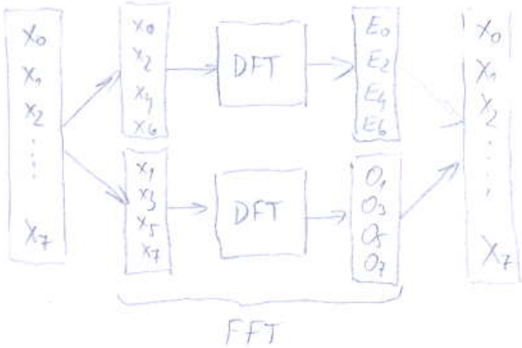
DFT vyžaduje N^2 komplex. súčtov a N^2 komplex. násobení, čo obmedzuje jej použitie pri výpočte v reál. čase. Preto sa v súčasnosti dáva prednosť algoritmu, ktorý je známy ako rýchla Fourierova transformácia FFT

- FFT vyžaduje $N \log N$ násobení operácií, čo predstavuje enormnú redukciu výpočtového času a súčasne sa zvyšuje presnosť výpočtu, pretože sa znižuje počet operácií spojených so zaokrúhľovaním.

- najpoužívanejším algoritmom FFT je Cooley-Tukeyho algoritmus, ktorý namiesto výpočtu DFT pôvodnej postupnosti $\{x(n)\}_{n=0}^{N-1}$ počíta DFT dvoch polovičných postupností (rekurzívne rozdelených).

$$DFT\{x(n)\}_{n=0}^{N-1} \rightarrow \begin{cases} DFT\{x(2m)\}_{m=0}^{N/2-1} \\ DFT\{x(2m+1)\}_{m=0}^{N/2-1} \end{cases}$$

výsledky oboch potom efektívne kombinujeme čím sa získa DFT celej sekvencie



$$X(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} e^{-i2\pi k \frac{2m}{N}} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} e^{-i2\pi k \frac{2m+1}{N}}$$

$$X(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} e^{-i2\pi k \frac{2m}{N}} + e^{-\frac{i2\pi k}{N}} \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} e^{-i2\pi k \frac{2m}{N}}$$

$$\boxed{X(k) = E_k + e^{-\frac{i2\pi k}{N}} O_k} \quad ; \text{ pre } k = 0, 1, 2, \dots \frac{N}{2}-1$$

- riešenie je aplikované iba pre polovicu koeficientov E_k a O_k.
- vzhľadom na symetriu diskrét. spektra pre ostatné koef. platí:

$$E_{k-N/2} = E_k, \quad O_{k-N/2} = O_k$$

⇒ výsledná DFT:
$$X(k) = \begin{cases} E_k + e^{-\frac{i2\pi k}{N}} O_k & \text{pre } 0 \le k \le N/2 - 1 \\ E_{k-N/2} + e^{-\frac{i2\pi (k-N/2)}{N}} O_{k-N/2} & \text{pre } N/2 \le k \le N-1 \end{cases}$$

- efektívne využitie algoritmu sa dosahuje, ak počet vzoriek N je mocninou čísla 2. Potom polovičné postupnosti môžu byť ďalej delené, až kým posledné postupnosti neobsahujú po jednom výraze

- dôležitým aspektom pri analýze je nastavenie FFT analyzátora, čím je možné ovplyvniť frekvenčný rozsah merania i rozlíšenie frekv. spektra: $\boxed{\Delta f = \frac{1}{T}} = \frac{1}{0{,}4} = 2{,}5\ \text{Hz}$ → definuje rozostup spektrál. čiar

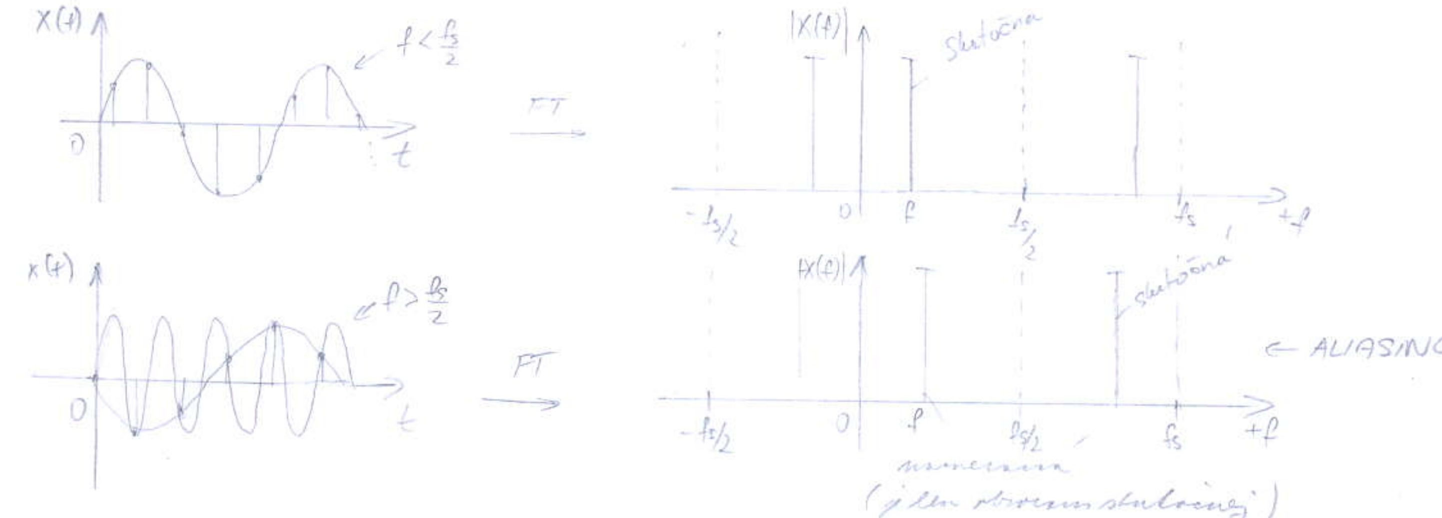
- najvyššia frekvencia spektra: $\boxed{f_{N/2} = \frac{N}{2}\Delta f = \frac{N}{2} \cdot \frac{1}{T}} = \frac{48}{2} \cdot 2{,}5 = 60\ \text{Hz}$

$\boxed{f_{N/2} = \frac{f_s}{2}}$ → Nyquistova frekvencia

3.2 CHYBY ZDÁNLIVOSTI (ALIASING)

- Bolo ukázané, že diskrétne frekv. spektrum je symetrické a združené k Nyquistovej frekvencii, t.j. $X(N/2 - r) = X^*(N/2 + r)$; $r = 1, 2, \dots$

- Zložky čas. signálu, kt. frekvencia je vyššia ako Nyquistova sa v dôsledku tejto symetrie objavujú tam, kde sa v skutočnosti nenachádzajú žiadne frekvencie → toto skreslenie frekv. spektra je chybou zdánlivosti

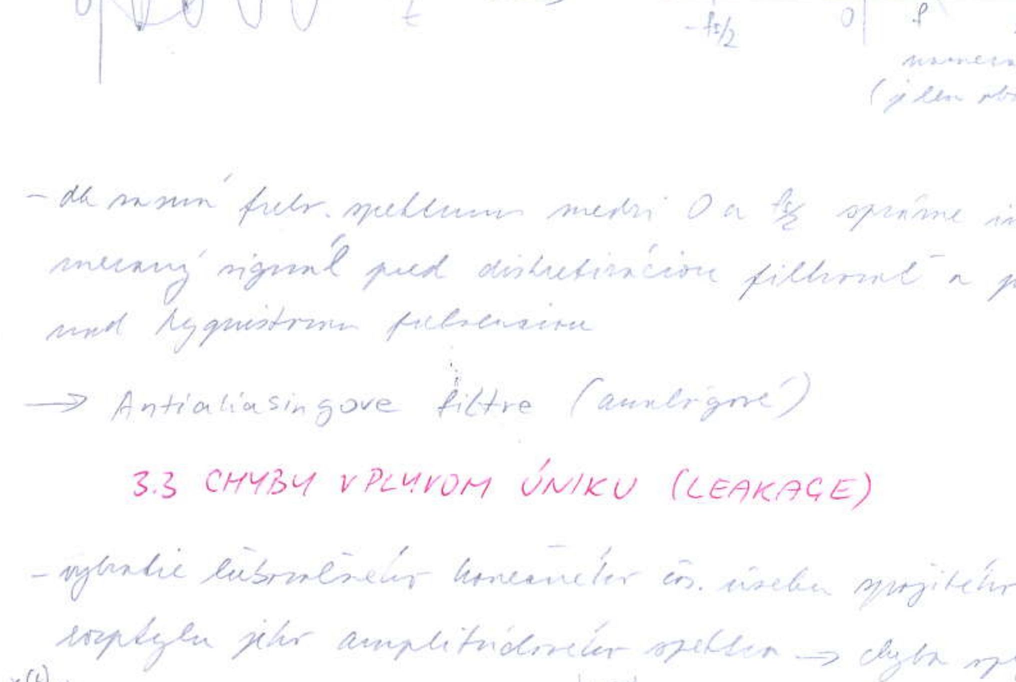


- aby sme mohli frekv. spektrum medzi 0 a $f_s/2$ správne interpretovať je potrebné merený signál pred diskretizáciou filtrovať a potlačiť všetky frekv. nad Nyquistovou frekvenciou

→ Antialiasingové filtre (analógové)

3.3 CHYBY VPLYVOM ÚNIKU (LEAKAGE)

- vybratie ľubovoľného konečného čas. úseku spojitého signálu vedie k skresleniu jeho amplitúdového spektra → chyba vplyvom úniku (Leakage)



- v dôsledku nespojitosti signálu na okrajoch dochádza k úniku energ[ie] z pôvodnej línie spektra
- výsledné spektrum je pos[...] ovplyvnené spektrum pravouhlého okna a vytvárajú bočné pásma
- amplitúda hlavnej spektr. je potom menšia, pretože celk. výkon sa rozdelí medzi ďalšie sp[...]

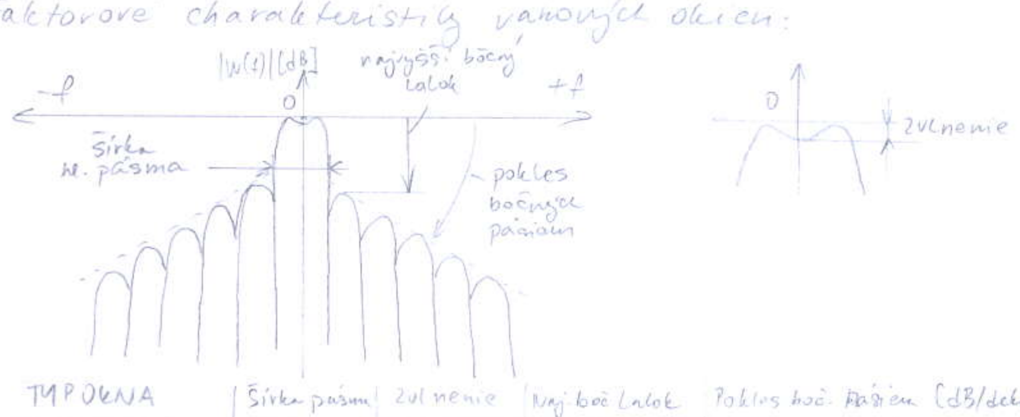
- týmto chyby rozlíšiteľnosti možno eliminovať rôznymi technikami, chyby spojené s únikom nemožno nikdy vylúčiť → sú preto najvýznamnejším problémom pri dig. spracovaní signálu

- ich následky možno znížiť – cyklickým priemerovaním
  - periodickým budením
  - zvýšením rozlíšenia frekv. spektra
  - vhodnými váhovými oknami

3.4 VÁHOVÉ OKNÁ

- v prípade stochastického signálu je vhodné použiť také váhové okno, ktoré nespôsobí na okrajoch vytváranie úseku nespojitosti
- použitie takéhoto okna má ale vplyv na distribúciu energie signálu → → dochádza k rozšíreniu kmit. pásma a k oslabeniu amplitúdy → tieto zmeny je možné korigovať pomocou opravných faktorov
- preto výber vhodného váhového okna je dôležitou podmienkou pre správnu interpretáciu nameraných údajov

Faktorové charakteristiky váhových okien:



TYP OKNA	Šírka pásma	Zvlnenie	Najv. boč. lalok	Pokles boč. pásiem (dB/dekáda)	Ampl. korekcia	Energ
Pravouhlé	1,0 Δf	3,9 dB	-13 dB	-20	1,00	1,0
Hanning	1,5 Δf	1,4 dB	-32 dB	-60	2,00	1,6
Hamming	1,36 Δf	1,8 dB	-43 dB	-20	2,80	1,9
Kaiser-Bessel	1,8 Δf	1,0 dB	-69 dB	-20	2,49	1,8
Blackman	2,0 Δf	1,1 dB	-92 dB	-20	1,85	1,5
Flat top	3,43 Δf	< 0,01 dB	-93 dB	0	4,18	2,2

→ čím väčšia je šírka pásma, tým horšie je frekvenčné rozlíšenie spektra

- pre každé okno je charakteristické iné rozloženie výkonu medzi hlavné a bočné pásmo
- k redukcii bočných pásiem dochádza, vyžaduje sa okno širšie hlav. pásmo
- keďže pri jednom okne je potrebné redukovať chyby spôsobené únikom a súčasne zachovať vlastnosti charakteristiky signálu, výber vhodného okna je vec kompromisu.

Pravouhlé okno - nemá vplyv na distribúciu energie
- aplikuje sa keď sú chyby spôsobené únikom zanedbateľné (harmonické priebehy, impulzy, periodické priebehy dosahujúce nulu presne na začiatku a konci periódy...)

Hanning - najčastejšie používané
- stochastické signály (v EMA sú signály odozvy i budenia)
- nevýhodou je nízka schopnosť rozlišovať medzi susednými frekvenciami s podobnými amplitúdami (nevh. aj na presné meranie malých signálov)

Hamming - vhodný pre signály s dynam. rozsahom okolo 50 dB

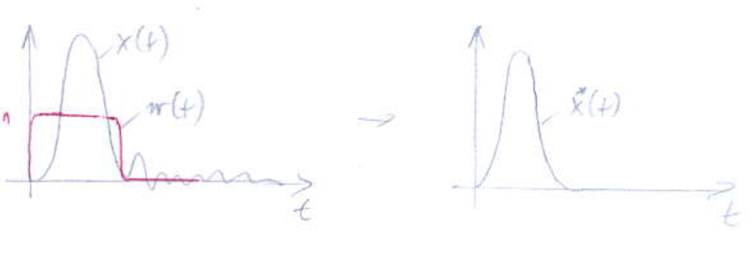
Blackman - používa sa, ak je treba identifikovať slabú zložku signálu v prítomnosti silnej

Kaiser-Bessel - vhodný pre odlíšenie viacnásobných zložiek s výrazne odlišnými úrovňami

Flattop - (okno s plochým vrcholom)
- presné merania s 1 frekvenciou (napr. tón)
- na kalibračné účely

Špeciálne typy filtračných okien

Force - vhodné na potlačenie šumu v budiacom signály (impulzy, rázové budiace účinky, prechodové signály)



Exponenciálne okno: – slúži na potlačenie šumu v mieste doznievania prechodového signálu

– vhodné pre signály odozvy pri rázovom budení

– do nameraných hodnôt zanáša ale umelé tlmenie, čo je potrebné zohľadniť pri analýze výsledkov modál. skúšky.