2.9 SÚSTAVY S NEPROPORCIONÁLNYM VISKÓZNYM TLMENÍM

(VŠEOB. PRÍPAD VISKÓZNEHO TLMENIA)

- o neproporcionálnom tlmení hovoríme, keď matica tlmenia [B] nie je lineár. kombináciou matíc [M] a [K]
- v takom prípade je riešenie sústavy pohyb. rovníc vhodné vykonať v tzv. stavovom priestore → to si ale vyžaduje zdvojnásobenie dimenzie rozšírenej sústavy rovníc $(n \Rightarrow 2n)$

$$[M]\{\ddot{x}\}+[B]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{f\}$$, kde [M], [B], [K] sú vo všeobecnosti nesymetrické matice s reálnymi prvkami

↓ (do stav. priestoru)

stavová rovnica: $\boxed{[\bar{M}]\{\dot{\bar{x}}\}+[\bar{K}]\{\bar{x}\}=\{\bar{f}\}}$ (1) (—) → rozšírené matice a vektory

kde: $\{\bar{x}\}=\begin{bmatrix}\{\dot{x}\}\\ \{x\}\end{bmatrix} \rightarrow \{\dot{\bar{x}}\}=\begin{bmatrix}\{\ddot{x}\}\\ \{\dot{x}\}\end{bmatrix}$

$$\{\bar{f}\}=\begin{bmatrix}\{0\}\\ \{f\}\end{bmatrix}$$

$$[\bar{M}]=\begin{bmatrix}[0] & [M]\\ [M] & [B]\end{bmatrix} \quad ; \quad [\bar{K}]=\begin{bmatrix}-[M] & [0]\\ [0] & [K]\end{bmatrix}$$

- hľadáme riešenie rovnice (1): $\underline{\left([\bar{K}]+\lambda[\bar{M}]\right)\{\bar{X}\}=\{0\}}$ (2)

frekv. determinant:

$$\det\left|[\bar{K}]+\lambda[\bar{M}]\right|=0 \qquad \left(=\det\left|[K]+\lambda[B]+\lambda^2[M]\right|\right)$$

⇓

- vlastné čísla: $\begin{Bmatrix}\lambda_r\\ \lambda_r^*\end{Bmatrix}=-\delta_r \pm i\Omega_{dr}$; $r=1,2,\dots,n$
- rozšír. mat. vl. čísel: $[\bar{\lambda}]=\begin{bmatrix}[\lambda] & [0]\\ [0] & [\lambda^*]\end{bmatrix}$
- dosadením vl. čísel do rov. (2) ⇒ rozšírené vl. vektory:

$$\{\bar{X}\}_r=\begin{bmatrix}\lambda_r\{\psi\}_r\\ \{\psi\}_r\end{bmatrix} \quad ; \quad \{\bar{X}^*\}_r=\begin{bmatrix}\lambda_r^*\{\psi^*\}_r\\ \{\psi^*\}_r\end{bmatrix}$$

- matica rozšír. vl. vektorov: $[\bar{X}]=\begin{bmatrix}[\lambda][\Psi] & [\lambda^*][\Psi^*]\\ [\Psi] & [\Psi^*]\end{bmatrix}$

kde: $[\lambda]$ - mat. vl. čísel ; $[\lambda]=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n)$

$[\Psi]$ - matica vlastných tvarov

2.9.1. Ortogonalita vlast. vektorov

- pri odvodení podmienok ortogonality postupujeme podobne ako v prípade ~~prepoč. nosník. elementu~~ sústav bez tlmenia
- vychádzame z rovnice (2):

pre r-tý mód: $([\bar{K}]+\lambda_r[\bar{M}])\{\bar{X}\}_r=\{0\} \quad / \{\bar{X}\}_s^T\cdot$

pre s-tý mód $\{\bar{X}\}_s^T([\bar{K}]+\lambda_s[\bar{M}])=\{0\} \quad / \cdot\{\bar{X}\}_r$

$$\left.\begin{aligned}\{\bar{X}\}_s^T([\bar{K}]+\lambda_r[\bar{M}])\{\bar{X}\}_r&=\{0\}\\ \{\bar{X}\}_s^T([\bar{K}]+\lambda_s[\bar{M}])\{\bar{X}\}_r&=\{0\}\end{aligned}\right\}\ominus$$

- za predpokladu, že matice $[M]$ a $[K]$ sú symetrické:

$$(\lambda_r-\lambda_s)\{\bar{X}\}_s^T[\bar{M}]\{\bar{X}\}_r=\{0\}$$

$\Downarrow$

rovnica je viazaná podmienkami:

$$\{\bar{X}\}_s^T[\bar{M}]\{\bar{X}\}_r=\begin{cases}0 & \text{pre } \lambda_r\neq\lambda_s\\ \tilde{\bar{M}}_r & \text{pre } \lambda_r=\lambda_s\end{cases} \qquad (3)$$

zov. modál. hmotnosť r-tého módu

analogicky:
$$\{\bar{X}\}_s^T[\bar{K}]\{\bar{X}\}_r=\begin{cases}0 & \text{pre } \lambda_r\neq\lambda_s\\ \tilde{\bar{K}}_r & \text{pre } \lambda_r=\lambda_s\end{cases} \qquad (4)$$

zov. modál. tuhosť r-tého módu

- rovnice (3) a (4) definujú podmienky ortogonality zovš. vl. vektorov

$[\bar{X}]^T[\bar{M}][\bar{X}]=[\tilde{\bar{M}}]$ → rovnicou mat. modál. hmotnosti

$[\bar{X}]^T[\bar{K}][\bar{X}]=[\tilde{\bar{K}}]$ → — " — mat. modál. tuhosti

kde: $[\tilde{\bar{M}}]=\mathrm{diag}(\tilde{\bar{M}}_1, \tilde{\bar{M}}_2, \dots, \tilde{\bar{M}}_n, \tilde{\bar{M}}_1^*, \tilde{\bar{M}}_2^*, \dots, \tilde{\bar{M}}_n^*)$

$[\tilde{\bar{K}}]=\mathrm{diag}(\tilde{\bar{K}}_1, \tilde{\bar{K}}_2, \dots\dots\dots, \tilde{\bar{K}}_n^*)$

2.9.2. Normovanie vl. vektorov na jednotk. hmotnosť

– pri odvádzaní norm. vektorov budeme vychádzať z rovnice $[\Phi]^T[M][\Phi]=[I]$ ktorú sme odvodili pre sústavu s proporcionálnym tlmením a ktorú aplikujeme na rozšír. vl. vektory tak, aby platilo $\tilde{\bar{M}}_r = 1$, t.j.

$$[\bar{\Phi}]^T[\bar{M}][\bar{\Phi}]=[I] \quad (5)$$; kde $[\bar{\Phi}]$ – rozšír. matica normov. vl. vektorov

– z podmienok ortogonality:

$$[\bar{X}]^T[\bar{M}][\bar{X}] = [\tilde{\bar{M}}] = [\tilde{\bar{M}}^{\frac{1}{2}}][\tilde{\bar{M}}^{\frac{1}{2}}]$$

$$[\tilde{\bar{M}}^{-\frac{1}{2}}][\bar{X}]^T[\bar{M}][\bar{X}][\tilde{\bar{M}}^{-\frac{1}{2}}] = [I] \quad (6)$$

– z porovnania (5) a (6) $\Rightarrow$ $[\bar{\Phi}] = [\bar{X}][\tilde{\bar{M}}^{-\frac{1}{2}}]$

$$\{\bar{\Phi}\}_r = \frac{1}{\sqrt{\tilde{\bar{M}}_r}}\{\bar{X}\}_r$$

– pre normované vektory taktiež platí: $\{\bar{\Phi}\}_r = \begin{bmatrix} \lambda_r\{\Phi\}_r \\ \{\Phi\}_r \end{bmatrix}$; $\{\bar{\Phi}^*\}_r = \begin{bmatrix} \lambda_r^*\{\Phi^*\}_r \\ \{\Phi^*\}_r \end{bmatrix}$

2.9.3 Pravostranné a ľavostranné vl. vektory

– ak sú matice $[M]$, $[B]$ a $[K]$ nesymetrické pre to isté vlastné číslo λ_r dostávame dvoje vlastné vektory:

1) z rov. $([\bar{K}]+\lambda_r[\bar{M}])\{\bar{X}\}_r=\{0\} \rightarrow$ rozšír. pravostranný vl. vektor $\{\bar{X}\}_r$

2) z rov: $\{\underline{\bar{X}}\}_r^T([\bar{K}]+\lambda_r[\bar{M}])=\{0\} \rightarrow$ rozšír. ľavostranný vl. vektor $\{\underline{\bar{X}}\}_r$

kde: $\{\bar{X}\}_r = \begin{bmatrix} \lambda_r\{\Psi\}_r \\ \{\Psi\}_r \end{bmatrix}$; $\{\bar{X}^*\}_r = \begin{bmatrix} \lambda_r^*\{\Psi^*\}_r \\ \{\Psi^*\}_r \end{bmatrix}$

$$\{\underline{\bar{X}}\}_r = \begin{bmatrix} \lambda_r\{\underline{\Psi}\}_r \\ \{\underline{\Psi}\}_r \end{bmatrix} ; \quad \{\underline{\bar{X}}^*\}_r = \begin{bmatrix} \lambda_r^*\{\underline{\Psi}^*\}_r \\ \{\underline{\Psi}^*\}_r \end{bmatrix}$$

– pre rozšír. normov. vl. vektory platí: $[\underline{\bar{\Phi}}]^T[\bar{M}][\bar{\Phi}]=[I]$

$$[\underline{\bar{\Phi}}]^T[\bar{K}][\bar{\Phi}] = -[\lambda]$$

kde $[\bar{\Phi}]$ a $[\underline{\bar{\Phi}}]$ sú rozšír. matice norm. pravostranných a ľavostr. vl. vektorov

$$[\bar{\Phi}] = \begin{bmatrix} [\lambda][\Phi] & [\lambda^*][\Phi^*] \\ [\Phi] & [\Phi^*] \end{bmatrix} ; \quad [\underline{\bar{\Phi}}] = \begin{bmatrix} [\lambda][\underline{\Phi}] & [\lambda^*][\underline{\Phi}^*] \\ [\underline{\Phi}] & [\underline{\Phi}^*] \end{bmatrix}$$

2.9.4 Modálna transformácia

tr. vzťah:

$\{\bar{x}\} = [\bar{\Phi}]\{\bar{q}\}$; kde $\{\bar{q}\}$ - vektor modál. súradníc (2n)

-stav. rovnica: $[\bar{M}]\{\dot{\bar{x}}\} + [\bar{K}]\{\bar{x}\} = \{\bar{f}\} \qquad / [\bar{\Phi}]^T \cdot$

$$[\bar{\Phi}]^T[\bar{M}][\bar{\Phi}]\{\dot{\bar{q}}\} + [\bar{\Phi}]^T[\bar{K}][\bar{\Phi}]\{\bar{q}\} = [\bar{\Phi}]^T\{\bar{f}\}$$

$$\boxed{\{\dot{\bar{q}}\} - [\bar{\lambda}]\{\bar{q}\} = [\bar{\Phi}]^T\{\bar{f}\}}$$ → súst. pohyb. rovníc v modál. priestore

$$\begin{cases} \dot{q}_r - \lambda_r q_r = \{\Phi\}_r^T\{f\} \\ \dot{q}_r^* - \lambda_r^* q_r^* = \{\Phi^*\}_r^T\{f\} \end{cases} \qquad \text{pre } r = 1, 2, \dots n$$

2.9.5 Funkcie frekv. odozvy

$\{\dot{\bar{q}}\} - [\bar{\lambda}]\{\bar{q}\} = [\bar{\Phi}]^T\{\bar{f}\}$

- predpokl. harm. budenie ⇒ harm. odozvy: $\{\bar{q}\} = \{\bar{Q}\}e^{i\omega t} \rightarrow \{\dot{\bar{q}}\} = i\omega\{\bar{Q}\}e^{i\omega t} = i\omega\{\bar{q}\}$

$(i\omega[I] - [\bar{\lambda}])\{\bar{q}\} = [\bar{\Phi}]^T\{\bar{f}\}$

$\{\bar{q}\} = (i\omega[I] - [\bar{\lambda}])^{-1}[\bar{\Phi}]^T\{\bar{f}\}$

- transf. do fyz. priestoru: $\{\bar{q}\} = [\bar{\Phi}]^{-1}\{\bar{x}\}$

$\{\bar{x}\} = [\bar{\Phi}](i\omega[I] - [\bar{\lambda}])^{-1}[\bar{\Phi}]^T\{\bar{f}\}$

$\{\bar{f}\} = \{\bar{F}\}e^{i\omega t}$;

$\{\bar{x}\} = \{\bar{X}\}e^{i\omega t}$

$\{\bar{X}\} = [\bar{\Phi}](i\omega[I] - [\bar{\lambda}])^{-1}[\bar{\Phi}]^T\{\bar{F}\}$

$$\begin{bmatrix} \{\dot{X}\} \\ \{X\} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{array} \right] \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{F\} \end{bmatrix}$$

⇓

$\{X\} = ([\Phi][D][\Phi]^T + [\Phi^*][D^*][\Phi^*]^T)\{F\}$

→ matica receptancie: $[\alpha(\omega)] = [\Phi][D][\Phi]^T + [\Phi^*][D^*][\Phi^*]^T$; kde $[D] = (i\omega[I] - [\lambda])^{-1}$

$[D^*] = (i\omega[I] - [\lambda^*])^{-1}$

- pre ľubovoľný prvok:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{n}\left(\frac{\phi_{rj}\,\phi_{rk}}{i\omega-\lambda_r} + \frac{\phi^*_{rj}\,\phi^*_{rk}}{i\omega-\lambda^*_r}\right) = \sum_{r=1}^{n}\left(\frac{R_{rjk}}{i\omega-\lambda_r}+\frac{R^*_{rjk}}{i\omega-\lambda^*_r}\right)$$

kde: $\begin{Bmatrix}\lambda_r\\ \lambda_r^*\end{Bmatrix} = -\delta_r \pm i\Omega_{dr}$

Zákl. vzťah pre exper. modálnu analýzu!

2.10 SÚSTAVY S NEPROPORCION. HYSTERÉZNYM TLMENÍM
(VŠ. PRÍPAD HYSTER. TLMENIA)

$$[M]\{\ddot{x}\} + \big(\underbrace{[K]+i[H]}_{[K^*]}\big)\{x\}=\{f\}$$

- homogénne riešenie: $\big([K^*]-\lambda[M]\big)\{X\}=\{0\}$

  - vlastné čísla (komplexné): $\lambda_r = \Omega_r^2(1+i\beta_r)$; $r=1,2,\dots n$

    kde Ω_r - vl. frekv. r-tého módu

    β_r - strat. faktor r-tého —

    pozn: v tomto prípade $\Omega_r \neq \Omega_{0r}$, avšak v mnohých prakt. prípadoch sú číselne blízke

  - vlastné vektory (komplexné): $\{\psi\}_r$

- podmienky ortogonality: $\left.\begin{aligned}[\psi]^T[M][\psi]&=[\tilde{M}]\\ [\psi]^T[K^*][\psi]&=[\tilde{k}]\end{aligned}\right\}$ → sú komplexné; $\lambda_r=\dfrac{\tilde{k}_r}{\tilde{M}_r}$

- normované vl. tvary $\{\phi\}_r = \dfrac{1}{\sqrt{\tilde{M}_r}}\{\psi\}_r$

$$[\phi]^T[M][\phi]=[I]$$

$$[\phi]^T[K^*][\phi]=[\lambda]$$ → diag. matica vl. čísel

- matica receptancie: $[\alpha(\omega)] = \big([K]+i[H]-\omega^2[M]\big)^{-1}$ → zo zákl. fyz. paramet

$$[\alpha(\omega)] = [\phi]\big([\lambda]-\omega^2[I]\big)^{-1}[\phi]^T$$

kde: $$\boxed{\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{n} \frac{\phi_{rj}\,\phi_{rk}}{\Omega_r^2 + i\beta_r\Omega_r - \omega^2}}$$ → súčtový mod. model

- menovateľ i čitateľ sú komplexné, čo je dôsledkom komplexnosti vl. tvarov → tým sa všeob. prípad hyster. tlmenia líši od prípadu s proporcionálnym tlmením