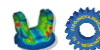


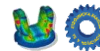
# MODÁLNA ANALÝZA MECHANICKÝCH SÚSTAV

## Prednáška č. 5



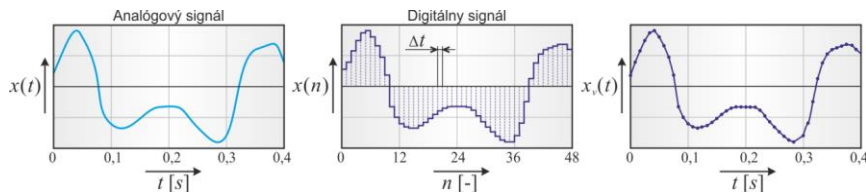
## 3. DIGITÁLNE SPRACOVANIE SIGNÁLU

(DSP = Digital Signal Processing)

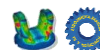


### 3. DIGITÁLNE SPRACOVANIE SIGNÁLU

- V EMA je každá meraná veličina je prevádzaná na elektrický signál, ktorý je zaznamenávaný v digitálnej forme → digitalizácia analógového signálu

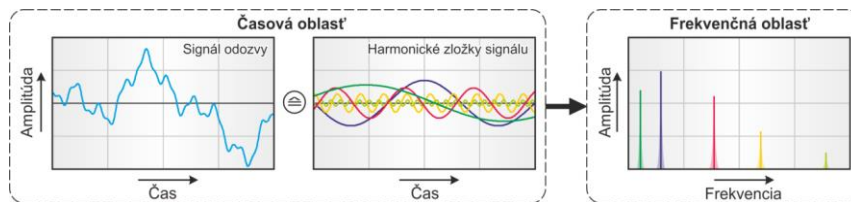


- diskretizácia časovo spojitkej funkcie  $x(t) \rightarrow$  diskrétna funkcia  $x(n) \rightarrow$  vzorkovacia funkcia  $x_s(t)$
- vzorkovacia frekvencia:  $f_s = \frac{N}{T} = \frac{48}{0,4} = 120 \text{ Hz}$
- perióda vzorkovania:  $\Delta t = \frac{1}{f_s} = \frac{1}{120} = 8,3 \cdot 10^{-3} \text{ s}$  (časový krok diskretizácie)



#### 3.1 Fourierova transformácia

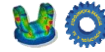
- Vo frekvenčnej oblasti je každá harmonická zložka odozvy vyjadrená jednou **spektrálnou čiarou**, pričom súbor týchto čiar sa nazýva **frekvenčné spektrum**.



- Na transformáciu signálu z časovej do frekvenčnej oblasti a späť sa používa **Fourierova transformácia**:

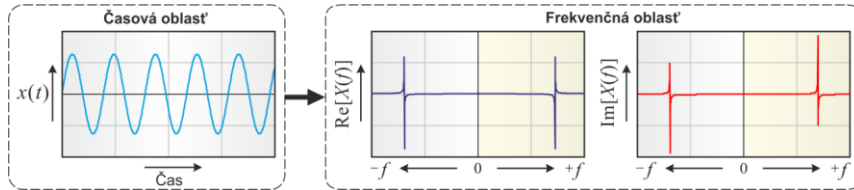
$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt = F\{x(t)\} \quad - \text{priama} \qquad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{j2\pi f t} df = F^{-1}\{X(f)\} \quad - \text{inverzná}$$

kde  $X(f)$  je obojstranné komplexné amplitúdové spektrum časovej funkcie  $x(t)$ .

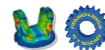


### 3.1 Fourierova transformácia

- Frekvenčné spektrum má reálnu a imaginárnu zložku a tieto zložky sú symetrické → Hermitovská symetria



- Hodnoty na kladnej a zápornej strane spektra sú komplexne združené → stačí analyzovať iba jednu stranu spektra



### 3.1 Fourierova transformácia

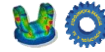
#### Diskrétna Fourierova transformácia (DFT)

- pre určenie diskrétného spektra

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-2\pi j k \frac{n}{N}} \quad \text{- priama} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{2\pi j k \frac{n}{N}} \quad \text{- inverzná} \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

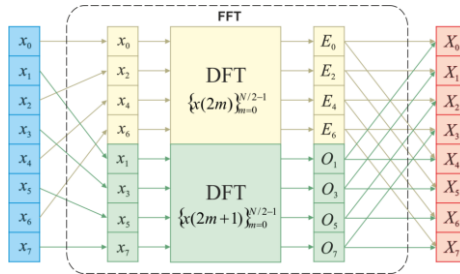
Nevýhoda: vyžaduje sa  $N^2$  komplexných súčtov a  $N^2$  komplexných súčinov



### 3.1 Fourierova transformácia

#### Rýchla Fourierova transformácia (FFT)

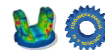
- enormná redukcia výpočtového času ( $N \log N$  vs.  $N^2$ ) a zároveň vyššia presnosť výpočtu
- **Cooley-Tukeyho algoritmus** – namiesto DFT pôvodnej postupnosti počíta DFT dvoch polovičných - rekurzívne rozdelených postupností:



$$X(k) = \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m} e^{-\frac{2\pi j}{N}(2m)k} + \sum_{m=0}^{N/2-1} x_{2m+1} e^{-\frac{2\pi j}{N}(2m+1)k}$$

$$X(k) = E_k + e^{-\frac{2\pi j}{N}k} O_k$$

$$k = 0, 1, \dots, N/2 - 1$$



### 3.1 Fourierova transformácia

#### Nastavenie FFT analyzátora

- Rozlíšenie frekvenčného spektra:

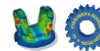
$$\Delta f = \frac{1}{T}$$

$$\Delta f = \frac{1}{0,4} = 2,5 \text{ Hz}$$

- Frekvenčný rozsah merania:

$$f_{N/2} = \frac{N}{2} \Delta f = \frac{N}{2} \frac{1}{T} = \frac{f_s}{2} \quad - \text{Nyquistova frekvencia}$$

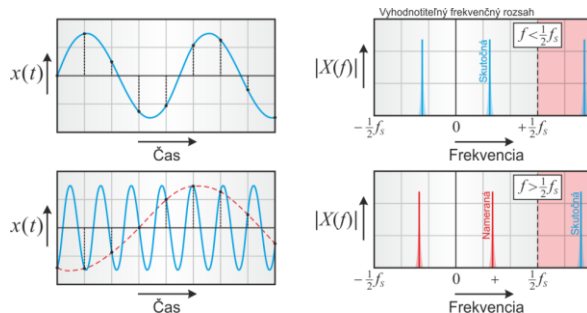
$$f_{N/2} = \frac{48}{2} \cdot 2,5 = 60 \text{ Hz}$$



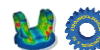
### 3.2 Chyby zdánlivosti (Aliasing)

- Bolo zistené, že diskrétné spektrum je symetrické aj vzhľadom k Nyquistovej frekvencii, t.j.:

$$X(N/2 + r) = X^*(N/2 - r), \quad r = 1, 2, \dots,$$

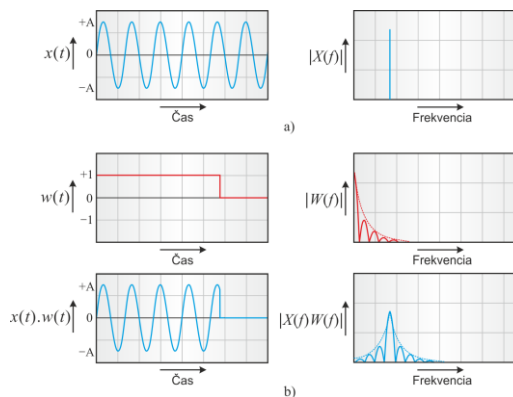


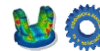
- Anti-aliasingové filtre



### 3.3 Chyby vplyvom úniku (Leakage)

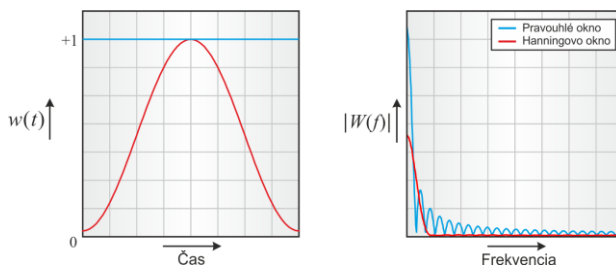
- Vybratie ľubovoľného konečného časového úseku meraného signálu vedie k rozptylu jeho amplitúdového spektra.
- Chyby únikom nemožno nikdy úplne vylúčiť.
- Ich následky možno znížiť:
  - cyklickým priemerovaním,
  - periodickým budením,
  - zvýšením rozlíšenia frekv. spektra,
  - „vážením“ (weighting).





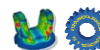
### 3.4 Váhové okná

- V prípade stochastického signálu je vhodné použiť váhové okno, ktoré na okrajoch vybraného úseku nespôsobí nespojitosti.
- Použitie váhového okna vplyva na distribúciu energie signálu:
  - rozšírenie hlavného pásma
  - oslabenie amplitúdy
 } korekcia pomocou opravných faktorov

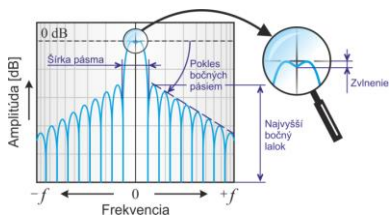


www.sjf.tuke.sk/kamasi

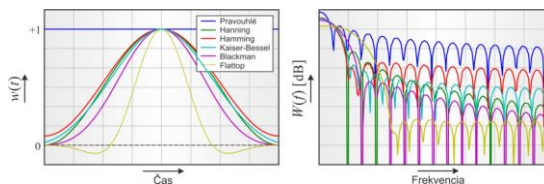
11



### 3.4 Váhové okná

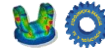


Typ okna	Šírka pásma	Zvlnenie [dB]	Najvyšší bočný lalok [dB]	Pokles bočných pásiem [dB/dekáda]
Pravouhlé	$1,00 \Delta f$	3,9	-13	-20
Hanning	$1,50 \Delta f$	1,4	-32	-60
Hamming	$1,36 \Delta f$	1,8	-43	-20
Kaiser-Bessel	$1,80 \Delta f$	1,0	-69	-20
Blackman	$2,00 \Delta f$	1,1	-92	-20
Flattop	$3,43 \Delta f$	<0,01	-93	0



www.sjf.tuke.sk/kamasi

12



### 3.4 Váhové okná

#### Pravouhlé okno

Používa sa v prípadoch, kedy sú chyby vplyvom úniku zanedbateľné (pri pravidelných sínusových priebehoch, impulzoch a prechodových signáloch, ktoré prirodzene nadobúdajú nulovú hodnotu na začiatku a konci intervalu)

#### Hanning

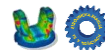
Patrí k najčastejšie používaným oknám. Využíva sa najmä pri analýze náhodných signálov s diskretnými frekvenčnými zložkami. Nevýhodou tohto okna je nízka schopnosť rozlišovať medzi susednými frekvenciami s podobnými amplitúdami. Z tohto dôvodu nie je vhodné pre presné meranie malých signálov. V modálnej analýze sa aplikuje na signály odozvy aj budenia.

#### Hamming

Toto okno vykazuje vyššiu hladinu a menší pokles bočných pásiem ako Hanningovo okno. Najvýhodnejšie ho je použiť pri signáloch, ktorých dynamický rozsah sa pohybuje okolo 50 dB.

#### Blackman

Používa sa, keď je potrebné identifikovať slabú zložku signálu v prítomnosti silnej.



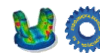
### 3.4 Váhové okná

#### Kaiser-Bessel

Filtračné vlastnosti tohto okna poskytujú dobrú selektivitu a preto je vhodné pre odlišenie viacnásobných zložiek s výrazne odlišnými úrovňami. V prípade náhodného budenia môže vykazovať väčšie úniky než Hanningovo okno.

#### Flatop

Okno s plochým vrcholom (flatop) má názov odvodený na základe nízkej hodnoty zvlnenia vrcholu hlavného pásma. Používa sa pri presných meraniach signálov s jednou frekvenciou (napr. tónov) a na kalibračné účely.

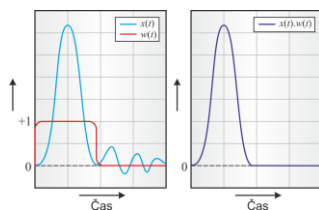


### 3.4 Váhové okná

#### Špeciálne typy váhových (filtračných) okien

##### Force Window

Používa sa v kombinácii s prechodovými signálmi, napr. v prípade impulzov a rázových budiacich účinkov. Je určený na potlačenie nežiaduceho šumu v budiacom signáli.

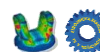
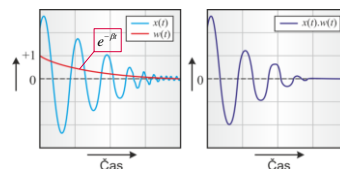


www.sjf.tuke.sk/kamasi

15

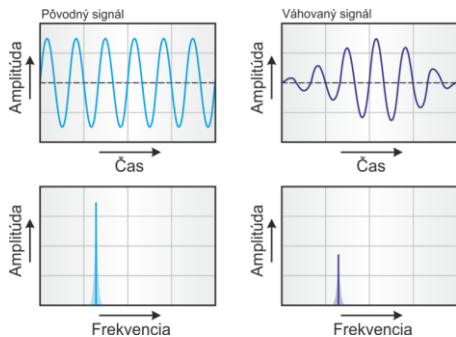
##### Exponenciálne okno

Slúži na potlačenie šumu v mieste doznievania prechodového signálu. Bežne aplikuje na signály odozvy kmitania štruktúry pri rázovom budení. Je potrebné upozorniť na to, že do nameraných hodnôt zavádza umelé tmenie a túto skutočnosť je nutné zohľadniť pri analýze výsledkov modálnej skúšky.



### 3.4 Váhové okná

#### Aplikácia Hanningovho okna

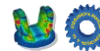


Typ okna	Amplitúdová korekcia	Energetická korekcia
Pravouhlé	1,00	1,00
Hanning 1x	2,00	1,63
Hanning 2x	2,67	1,91
Hanning 3x	3,20	2,11
Hamming	2,80	1,97
Blackman	1,85	1,59
Kaiser-Bessel	2,49	1,86
Flatop	4,18	2,26

www.sjf.tuke.sk/kamasi

16

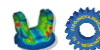




### 3.5 Priemerovanie signálu

Každý meraný signál je zaťažený **šumom**. Tento šum je prejavom buď systematickej alebo náhodnej chyby:

- **Systematické chyby** sú dané nepresnosťou meracieho zariadenia resp. meracej metódy. Za stálych podmienok merania sa nemenia, takže na výsledky opakovaných meraní vplývajú rovnako, napr. výsledok merania vždy zväčšujú alebo znižujú. Systematické chyby je možné pomerne ľahko identifikovať a ich vplyv zmenšiť pomocou korekcií či kompenzácií.
- **Náhodné chyby** pôsobia náhodne, sú ťažko predvídateľné, navzájom nezávislé a vyskytujú sa pri každom meraní. Ich vplyv je možné obmedziť priemerovaním väčšieho počtu opakovaných meraní, kedy sa náhodný šum spriemeruje na hodnoty blízke nule.



### 3.5 Priemerovanie signálu

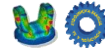
- Najčastejšie používanými metódami sú:
  1. **lineárne priemerovanie** - každý z  $M$  po sebe meraných signálov  $x_m(t)$  má rovnaký vplyv na výsledný priemerný signál:

$$\bar{x}(t) = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M x_m(t)$$

2. **exponenciálne priemerovanie** - najväčší vplyv na výsledok má posledný z meraných signálov (vplyv predchádzajúcich signálov sa postupne znižuje):

$$\bar{x}_m(t) = \left( \frac{\tau - 1}{\tau} \right) \bar{x}_{m-1}(t) + \frac{x_m(t)}{\tau}$$

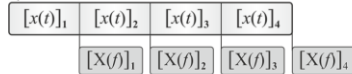
kde  $\tau$  je konštanta vystupujúca ako faktor váženía.



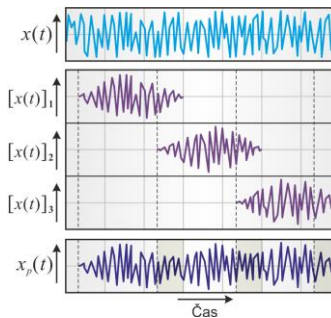
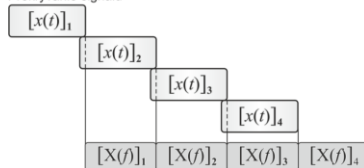
### 3.6 Prekrývanie signálu

- **Čas procesu** je čas vyžadovaný na transformáciu jedného časového bloku (okna) údajov do frekvenčného spektra. Jeho dĺžka závisí od veľkosti okna a od vzorkovacej frekvencie (frekv. rozsahu).
- Pokiaľ je čas procesu kratší ako čas potrebný na zhromaždenie údajov jedného okna → **analýza prebieha v reálnom čase**; v opačnom prípade je potrebné pristúpiť k tzv. prekrývaniu **váňovaných** časových blokov:

a) Spracovanie v reálnom čase

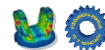


b) Prekrývanie signálu



www.sjf.tuke.sk/kamasi

19



### 3.7 Charakteristické funkcie diskrétného frekvenčného spektra

#### VÝKONOVÉ SPEKTRUM (Power-Spectrum)

- Definuje, ako je výkon signálu rozložený medzi jednotlivé frekvencie:

$$S_{xx}(k) = X(k) X^*(k), \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

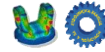
kde  $S_{xx}(k)$  je **obojsstranné výkonové spektrum** diskkrétnej časovej funkcie  $x(n)$ ,

$X(k) = F\{x(n)\}$  je obojsstranné amplitúdové spektrum získané pomocou DFT.

- Výkonové spektrum je taktiež symetrické, ale na rozdiel od amplitúdového spektra nadobúda len reálne hodnoty a preto neposkytuje informáciu o fáze.

www.sjf.tuke.sk/kamasi

20



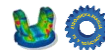
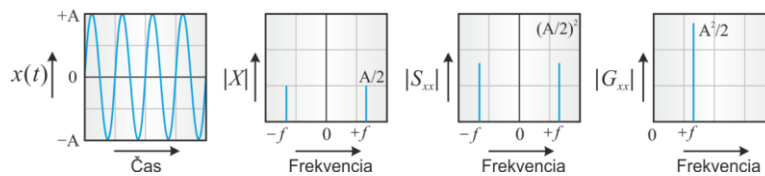
### 3.7 Charakteristické funkcie diskretného frekvenčného spektra

#### VÝKONOVÉ SPEKTRUM (Power-Spectrum)

- Jednostranné výkonové spektrum:

$$G_{xx}(k) = \begin{cases} S_{xx}(k) & \text{pre } k = 0, \\ 2S_{xx}(k) = \frac{A_k^2}{2} & \text{pre } k = 1, \dots, N/2 - 1, \end{cases}$$

kde  $A_k$  je amplitúda  $k$ -tej spektrálnej čiary amplitúdového spektra.



### 3.7 Charakteristické funkcie diskretného frekvenčného spektra

#### KRÍŽOVÉ VÝKONOVÉ SPEKTRUM (Cross-Spectrum)

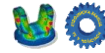
- Definuje, vzájomný výkon dvoch signálov na jednotlivých frekvenciách.

- Jednostranné krížové centrum:

$$G_{xy}(k) = 2X^*(k)Y(k)$$

kde  $X(k)$ ,  $Y(k)$  sú jednostranné amplitúdové spektrá diskretných signálov.

- Krížové výkonové spektrum poskytuje informácie o veľkosti aj relatívnej fáze signálov. Táto informácia je užitočná najmä pri skúmaní fázových vzťahov.
- Pokiaľ budú úrovně oboch signálov vysoké (nízke), bude aj ich krížové spektrum dosahovať veľké (malé) hodnoty. Preto sa často využíva ako indikátor vzájomnej úrovne vstupného a výstupného signálu alebo na výpočet funkcie frekvenčného prenosu.



### 3.7 Charakteristické funkcie diskretného frekvenčného spektra

#### VÝKONOVÁ SPEKTRÁLNA HUSTOTA (PSD - Power Spectral Density)

- Normalizuje hladiny výkonového spektra s ohľadom na jeho frekvenčné rozlíšenie. Tým je možné eliminovať rozdiely, ktoré môžu vzniknúť pri použití rôznych frekvenčných rozsahov. Je to štandardný spôsob posudzovania stacionárnych širokopásmových signálov.
- Nadobúda iba reálne hodnoty a preto neposkytuje žiadnu informáciu o fáze.

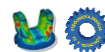
- **Obojstranná výkonová spektrálna hustota:**

$$\hat{S}_{xx}(k) = \frac{S_{xx}(k)}{\Delta f} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

kde  $\Delta f$  charakterizuje frekvenčný odstup spektrálnych čiar.

- **Jednostranná výkonová spektrálna hustota:**

$$\hat{G}_{xx}(k) = \begin{cases} \hat{S}_{xx}(k) & \text{pre } k = 0, \\ 2\hat{S}_{xx}(k) = \frac{A_k^2}{2\Delta f} & \text{pre } k = 1, \dots, N/2 - 1. \end{cases}$$



### 3.7 Charakteristické funkcie diskretného frekvenčného spektra

#### KRÍŽOVÁ SPEKTRÁLNA HUSTOTA (CPSD - Cross Power Spectral Density)

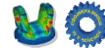
- Normalizuje hladiny vzájomného výkonového spektra dvoch signálov s ohľadom na frekvenčné rozlíšenie.
- Nadobúda komplexné hodnoty, t.j. poskytuje informácie o relatívnej fáze analyzovaných signálov.
- Má veľký význam pri analýze lineárnych sústav (napr. OMA)

- **Obojstranná CPSD:**

$$\hat{S}_{xy}(k) = \frac{S_{xy}(k)}{\Delta f} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

- **Jednostranná CPSD:**

$$\hat{G}_{xy}(k) = \begin{cases} \hat{S}_{xy}(k) & \text{pre } k = 0, \\ 2\hat{S}_{xy}(k) & \text{pre } k = 1, \dots, N/2 - 1 \end{cases}$$



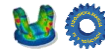
### 3.7 Charakteristické funkcie diskrétného frekvenčného spektra

#### KOHERENCIA (Coherence)

- Koherencia je štatistickou funkciou, ktorá vyjadruje mieru kauzálnej závislosti medzi výstupným a vstupným signálom.

$$\gamma^2(f) = \frac{|G_{yx}(f)|^2}{G_{yy}(f) G_{xx}(f)}$$

- Koherenčná funkcia nadobúda hodnoty v intervale 0 až 1.
- Hodnoty blízke 1 znamenajú, že výstupný signál je takmer výhradne odozvou na vstupný (budiaci) signál.
- Veľmi nízke hodnoty indikujú chyby alebo nepresnosti vyvolané prítomnosťou šumu, nelinearitou prenosu alebo časovým oneskorením.
- Pomocou koherencie možno posudzovať presnosť merania funkcie frekvenčného prenosu, príp. presnosť synchronizácie budičov.



ĎAKUJEM ZA POZORNOSŤ