

TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH  
STROJNÍCKA FAKULTA



**DYNAMIKA V PRÍKLADOCH**

prof. Ing. Jozef Bocko, CSc.

Ing. Jozef Filas, CSc.

Ing. Róbert Huňady, PhD.

Ing. Peter Sivák, PhD.

EDÍCIA ŠTUDIJNEJ LITERATÚRY  
Košice 2011



# TECHNICKÁ UNIVERZITA V KOŠICIACH

## STROJNÍCKA FAKULTA

Katedra aplikovanej mechaniky a mechatroniky

prof. Ing. Jozef Bocko, CSc., Ing. Jozef Filas, CSc.,  
Ing. Róbert Huňady, PhD., Ing. Peter Sivák, PhD.

# **DYNAMIKA V PRÍKLADOCH**

Košice 2011

© prof. Ing. Jozef Bocko, CSc.,  
Ing. Jozef Filas, CSc.,  
Ing. Róbert Huňady, PhD.,  
Ing. Peter Sivák, PhD.

Lektori:

prof. Ing. Milan Žmindák, CSc.,  
prof. Ing. Ján Vavro, PhD.

ISBN 978-80-553-0832-6

## Obsah

<b>Predhovor .....</b>	<b>6</b>
<b>1 Úvod .....</b>	<b>7</b>
1.1 Základné axiómy dynamiky .....	7
1.2 Jednotky základných fyzikálnych veličín v dynamike.....	8
1.3 Dynamické pohybové rovnice (DPR) .....	8
1.4 Typy úloh v dynamike .....	9
1.4.1 Priama úloha dynamiky .....	9
1.4.2 Nepriama (obrátená, inverzná) úloha dynamiky .....	9
1.5 Metodika riešenia úloh v dynamike .....	9
<b>2 Dynamika hmotného bodu .....</b>	<b>12</b>
2.1 DPR hmotného bodu v pravouhlej kartézskej súradnicovej sústave.....	12
2.2 DPR hmotného bodu vo valcovej (resp. polárnej) súradnicovej sústave.....	13
2.3 DPR hmotného bodu v prirodzenej súradnicovej sústave.....	14
2.4 Základné vety dynamiky hmotného bodu .....	15
2.4.1 Veta o zmene hybnosti .....	15
2.4.2 Veta o zmene momentu hybnosti .....	16
2.4.3 Veta o zmene kinetickej energie.....	16
2.4.4 Veta o zachovaní mechanickej energie.....	17
2.4.5 Práca, výkon .....	17
2.5 Príklady (priama úloha dynamiky).....	18
2.6 Príklady (nepriama úloha dynamiky).....	31
2.7 Relatívny pohyb hmotného bodu .....	51
2.7.1 Príklady (Relatívny pohyb hmotného bodu) .....	51
<b>3 Dynamika sústav hmotných bodov (SHB).....</b>	<b>58</b>
3.1 Pohybové rovnice SHB .....	58
3.2 Vety o pohybe ťažiska SHB.....	59
3.2 Hybnosť a moment hybnosti SHB .....	59
3.4 Kinetická energia SHB.....	60
3.5 Príklady (SHB).....	60
<b>4 Geometria hmôt .....</b>	<b>73</b>
4.1 Momenty zotrvačnosti.....	73

4.2	Momenty zotrvačnosti k pootočenej osi.....	74
4.2.1	Deviačné momenty k pootočeným osiam.....	75
4.3	Momenty zotrvačnosti k posunutým (rovnobežným) osiam.....	75
4.4	Momenty zotrvačnosti tuhého telesa.....	77
4.5	Príklady .....	77
<b>5</b>	<b>Posuvný a rotačný pohyb telesa.....</b>	<b>87</b>
5.1	Posuvný pohyb telesa.....	87
5.1.1	Príklady (Posuvný pohyb telesa) .....	88
5.2	Rotačný pohyb telesa (okolo stálej osi rotácie).....	95
5.2.1	Príklady (Rotačný pohyb telesa).....	96
5.3	Dynamické reakcie pri rotačnom pohybe telesa .....	103
5.3.1	Príklady (Dynamické reakcie pri rotačnom pohybe telesa).....	105
<b>6</b>	<b>Všeobecný rovinný pohyb telesa.....</b>	<b>112</b>
6.1	Príklady (Všeobecný rovinný pohyb telesa) .....	113
<b>7</b>	<b>Sférický pohyb telesa .....</b>	<b>123</b>
7.1	Príklady (Sférický pohyb telesa) .....	125
<b>8</b>	<b>Skrutkový pohyb telesa .....</b>	<b>131</b>
8.1	Príklady (Skrutkový pohyb telesa).....	131
<b>9</b>	<b>Súčasné pohyby telesa .....</b>	<b>134</b>
9.1	Príklady (Súčasné pohyby telesa) .....	135
<b>10</b>	<b>Dynamika mechanických sústav.....</b>	<b>137</b>
10.1	Metóda uvoľnenia .....	137
10.2	Metóda redukcie hmotnostných a silových veličín.....	138
10.3	Lagrangeove rovnice II. druhu .....	138
10.4	Princíp virtuálnych prác .....	139
10.5	Veta o zmene veľkosti kinetickej energie sústavy .....	140
10.6	Príklady (Dynamika mechanických sústav).....	140
10.7	Riešenie úloh dynamiky pomocou výpočtovej techniky .....	169
<b>11</b>	<b>Kmitanie lineárnych diskrétnych sústav .....</b>	<b>174</b>
11.1	Voľné kmitanie lineárnej sústavy s 1° voľnosti bez tlmenia .....	174
11.2	Voľné kmitanie lineárnej sústavy s 1° voľnosti s tlmením .....	175
11.3	Vynútené kmitanie sústavy s 1° voľnosti bez tlmenia .....	176

11.4 Vynútené kmitanie sústavy s 1° voľnosti s tlmením.....	177
11.5 Radenie pružín .....	178
11.6 Príklady (Kmitanie sústav s 1° voľnosti) .....	179
11.7 Príklady riešenia kmitania sústav s 1° voľnosti v Matlabe .....	210
<b>Literatúra .....</b>	<b>230</b>

## PREDHOVOR

Obsah týchto učebných textov napĺňa osnovu predmetu Dynamika v druhom ročníku bakalárskeho štúdia Strojníckej fakulty TU Košice v študijných programoch Všeobecné strojárstvo a Mechatronika. Učebné texty môžu využiť aj študenti iných študijných programov.

V každej kapitole je uvedený stručný prehľad základných vzťahov, po ktorom nasledujú riešené a neriešené príklady s výsledkami. Riešené príklady sú s komentárom, ktorý čitateľovi pomôže zorientovať sa v danej problematike.

Dve kapitoly, riešenie mechanických sústav a kmitanie, obsahujú aj riešené úlohy s využitím programových balíkov MSC.Adams a Matlab. Pochopiteľne, nebolo možné v týchto príkladoch uvádzať celý postup riešenia, pretože by to bolo značne náročné z hľadiska rozsahu.

Učebné texty obsahujú príklady, ktoré patria do oblasti technickej aplikácie dynamiky ako súčasti fyziky.

Existuje dostatok literatúry, aj s riešenými úlohami z oblastí mechaniky, dynamiky, technickej mechaniky, záleží len na možnostiach (jazykové znalosti, prístup ku knižniciam), snahe záujemcu, do akej šírky a do akej hĺbky pôjde pri štúdiu a aplikovaní poznatkov z dynamiky.

Ďakujeme Dr.h.c. mult. prof. Ing. Františkovi Trebuňovi, CSc., vedúcemu Katedry aplikovanej mechaniky a mechatroniky za podporu pri vydaní tohto učebného textu.

Ďakujeme lektorom, prof. Ing. Jánovi Vavrovi, PhD., prof. Ing. Milanovi Žmindákovi, CSc., za starostlivé posúdenie učebných textov a za všetky pripomienky.

Osobitné poďakovanie patrí Alene Nudzíkovej, Ing. Eve Dzurišovej, Ing. Kristíne Maslákovej, Ing. Tomášovi Harčarikovi za prepísanie textov.

Autori



# 1 ÚVOD

## 1.1 Základné axiomy dynamiky

Dynamika ako časť mechaniky (a súčasť fyziky) má axiomatickú hierarchiu. Základnými zákonmi (axiómami) dynamiky sú Newtonove zákony:

### 1. zákon (zákon zotrvačnosti)

Hmotný objekt zotráva v pokoji alebo v stave rovnomerného priamočiareho pohybu, pokiaľ nie je vonkajšími silami prinútený tento pohybový stav zmeniť. Jeho platnosť je potvrdzovaná denno-denne ľudskými skúsenosťami.

### 2. zákon (zákon sily resp. zákon o zmene hybnosti)

Časová zmena hybnosti je úmerná vonkajšej sile a prebieha v smere tejto sily. Ak

$$\mathbf{H} = m\mathbf{v}$$

je hybnosť, kde  $m$  je hmotnosť a  $\mathbf{v}$  je vektor rýchlosti, potom zmena hybnosti v čase

$$\frac{d}{dt}\mathbf{H} = \mathbf{F},$$

kde  $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$  je výsledný účinok vonkajších síl  $\mathbf{F}_i$  pôsobiacich na hmotný objekt.

Ak silová sústava pôsobiaca na hmotný objekt je rovnovážna, teda  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ , potom

$$\mathbf{H} = \text{konšt.}$$

Ak v čase konania pohybu sa hmotnosť nemení, potom

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a},$$

teda

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F},$$

kde  $\mathbf{a}$  je zrýchlenie vo zvolenom súradnicovom systéme.

V gravitačnom poli Zeme Newtonov zákon sily môžeme písať v tvare

$$m\mathbf{g} = \mathbf{G},$$

kde  $\mathbf{G}$  je tiaž (tiažová sila) a  $\mathbf{g}$  je gravitačné zrýchlenie, ktoré je rôzne pre rozličné polohy na Zemi. Pre naše potreby postačí, ak budeme uvažovať  $g = 9,806 \text{ ms}^{-2}$ .

### 3. zákon (zákon akcie a reakcie)

Vzájomné pôsobenie dvoch hmotných objektov má rovnakú veľkosť, rovnaký smer a opačnú orientáciu.

K uvedeným zákonom (axiómam) pridáme ešte **princíp nezávislosti pôsobenia síl**: ak na hmotný objekt pôsobí súčasne viacero vonkajších síl, ich výsledný účinok je úmerný vektorovému súčtu jednotlivých zrýchlení, ktoré by objekt získal vplyvom každej zo síl osobitne, pričom nezáleží na poradí pôsobiacich síl.

## 1.2 Jednotky základných fyzikálnych veličín v dynamike

V dynamike používame základné fyzikálne veličiny: dĺžka, čas a hmotnosť.

Základnou jednotkou dĺžky  $l$  je meter, t.j.  $[l]=\text{m}$ .

Základnou jednotkou času  $t$  je sekunda, t.j.  $[t]=\text{s}$ .

Základnou jednotkou hmotnosti  $m$  je kilogram, t.j.  $[m]=\text{kg}$ ,

Jednotkou sily  $F$  je 1 Newton, t.j.  $[F]=\text{N}$ , kde  $F = m \cdot a$  a teda  $1\text{N}=1\text{kg}\cdot 1\text{ms}^{-2}$ .

## 1.3 Dynamické pohybové rovnice (DPR)

Ak chceme popísať pohybový stav hmotného objektu zostavíme matematické rovnice, ktoré vyjadrujú vzťahy medzi kinematickými veličinami (dráha, rýchlosť, zrýchlenie) a pôsobiacimi vonkajšími vplyvmi (sily, momenty resp. výkon a pod.) pôsobiacimi na daný objekt.

- Ak pri zostavovaní týchto vzťahov budeme vychádzať z 2. Newtonovho zákona (zákona sily) a rozpíšeme ich v smere osí zvoleného súradnicového systému, budeme im hovoriť dynamické pohybové rovnice (DPR).
- Iným spôsobom zostavovania DPR je využitie d'Alembertovho princípu: Všetky sily, ktoré pôsobia na daný objekt sú v rovnováhe so zotrvačnými silami tohto objektu.

Súčin  $ma$  v Newtonovom zákone sily d'Alembert využil k zavedeniu pojmu zotrvačná sila

$$\mathbf{D} = -m\mathbf{a}.$$

Potom DPR má podobu

$$\sum \mathbf{F}_i + \mathbf{D} = \mathbf{0}.$$

Takýmto spôsobom sa rovnice popisujúce nerovnovážny stav formálne prepíšu do podoby vyjadrujúcej rovnováhu.

Samozrejme, že tento formálne iný spôsob zapisovania DPR sa týka tej istej pôvodnej sústavy, ktorej pohybový stav (fyzikálna podstata) sa nemení. Tento spôsob umožňuje zapisovať DPR vo forme podobnej statickým podmienkam rovnováhy v statike, čo môže byť výhodné pri niektorých typoch úloh.

## 1.4 Typy úloh v dynamike

### 1.4.1 Priama úloha dynamiky

- **poznáme pohyb, hľadáme sily**

Ak je pohyb (napr. hmotného bodu) určený parametrickými rovnicami

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t),$$

potom vieme určiť zložky zrýchlenia

$$\ddot{x} = \ddot{f}_1(t), \quad \ddot{y} = \ddot{f}_2(t), \quad \ddot{z} = \ddot{f}_3(t)$$

a z DPR určíme sily

$$F_x = m\ddot{x}(t), \quad F_y = m\ddot{y}(t), \quad F_z = m\ddot{z}(t).$$

### 1.4.2 Nepriama (obrátená, inverzná) úloha dynamiky

- **poznáme sily, hľadáme pohyb**

Vo všeobecnosti je tento typ úlohy zložitejší, analyticky často neriešiteľný. Sila pôsobiaca na hmotný objekt je funkciou jeho polohy, rýchlosti, času, teda  $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t)$ . Rýchlosť a polohu je možné určiť integráciou DPR (teda „opačným“ postupom ako v prvom type úloh).

Táto úloha vedie k riešeniu sústavy diferenciálnych rovníc, určovaniu integračných konštánt atď.

## 1.5 Metodika riešenia úloh v dynamike

Postup pri riešení úloh v dynamike je úloha mnohoznačná, závisiaca od skúsenosti riešiteľa, časového faktora, požadovanej presnosti riešenia a pod.

Ak sa chceme zbaviť podstatných systémových chýb pri riešení a vyhnúť sa riešeniu toho, čo nie je fyzikálnou podstatou úlohy, pričom môže ísť o úlohu v zásade neriešiteľnú v podobe, ako je naformulovaná, potom je vhodné použiť osvedčený postup riešenia úloh v dynamike.

Nasledujúce body sa podobajú tomu, čo možno poznáme zo statiky, pretože statika je len jeden z hraničných prípadov dynamiky, ak zrýchlenia sú nulové.

### 1. Uvoľnenie

- z hľadiska toho, čo sa pohybuje (hmotný bod, sústava hmotných bodov, teleso, sústava telies,...), ako sa pohybuje (priamočiarno, krivočiarno v rovine, v priestore, rovnomerne, zrýchlene,...),
- zaznačíme všetky sily pôsobiace na hmotný objekt, t. j. tiaže, aktívne sily a momenty (pohon), väzby nahradíme reakciami (u neznámych síl si zvolíme ich orientáciu),
- pokiaľ je to možné, zaznačíme základné kinematické veličiny (dráhu, rýchlosť, zrýchlenie), ich smery a orientácie,
- na základe zakreslených síl určíme typ silovej sústavy pôsobiacej na hmotný objekt a na základe toho, o aký hmotný objekt ide (t.j. čo sa pohybuje), zvolíme súradnicovú sústavu, pričom s výhodou využijeme známu orientáciu zrýchlenia a súhlasne s ňou orientujeme príslušne osi,
- určíme, či riešime pohyb jedného hmotného objektu resp. pohyb sústavy,
- na základe vyššie uvedeného vieme určiť, koľko a aké dynamické pohybové rovnice (DPR) je možné napísať a koľko stupňov voľnosti sústava (objekt) má,
- uvoľňujeme vo všeobecnom časovom okamihu, t.j. v polohe medzi dvoma krajnými polohami vyšetrovaného úseku.

### 2. Zostavenie dynamických pohybových rovníc (DPR)

Dynamické pohybové rovnice budú závisieť na tom, akú metódu a aké zákony (princípy, vety a pod) použijeme pre ich napísanie. Zapísané DPR spočítame, spočítame tiež neznáme na ľavých a pravých stranách DPR a chýbajúci počet rovníc (vzhľadom na počet neznámych) sa pokúsime doplniť v zásade z dvoch zdrojov:

- a) zo súvislostí medzi pohybmi členov sústavy (závislosti medzi kinematickými veličinami, prevody a pod.),
- b) z pasívnych odporov (trenie, valivé odpory, čapové trenie, tuhosť a neohybnosť lán a pod.).

- c) k tomu pripočítame obmedzenia (hranice) známe z technologického procesu, z logiky pohybu celej sústavy a pod.

### **3. Interpretácia výsledkov riešenia**

- kladné znamienka neznámych síl (kladné znamienka neznámych kinematických veličín) majú význam rovnakej orientácie neznámej veličiny, akú sme si zvolili na začiatku riešenia pri uvoľnení,
- záporné znamienka majú význam opačnej orientácie než sme si zvolili,
- môžeme urobiť formálnu kontrolu správnosti riešenia (napr. porovnať pravé a ľavé strany rovníc a pod.).

### **4. Overenie výsledkov riešenia**

Overenie výsledkov by bolo žiaduce pri novo riešených sústavách, s nerutinným postupom, s novými hodnotami veličín, najlepšie riešením úplne od začiatku inou metódou.

## 2 DYNAMIKA HMOTNÉHO BODU

**Hmotný bod** – pod týmto pojmom budeme rozumieť idealizáciu reálneho hmotného objektu ľubovoľného tvaru a veľkosti, ľubovoľnej hmotnosti, ak vyhoví podmienkam:

- hmotnosť reálneho hmotného objektu sústredíme do jedného bodu (zvyčajne ťažiska),
- zanedbáme vonkajšie rozmery hmotného objektu,
- zjednodušenie (idealizácia) nebude mať podstatný vplyv na správnosť riešenia dynamiky pohybu hmotného objektu.

Newtonov zákon sily vo vektorovom tvare s konštantnou hmotnosťou

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F},$$

predstavuje základnú rovnicu dynamiky hmotného bodu. Umožňuje skúmať pohyb voľného aj viazaného hmotného bodu. To znamená, že nám umožní pri skúmaní pohybu hmotného bodu zahrnúť ako vonkajšie sily (zaťažujúce), tak aj sily od okolitých objektov, teda reakcie.

Podľa toho, aké súradnicové sústavy použijeme pre skúmanie pohybu hmotného bodu, budeme základnú rovnicu dynamiky jeho pohybu rozpisovať do **zložkových** rovníc.

V princípe platí, že počet zložkových rovníc (ako DPR) sa rovná počtu stupňov voľnosti príslušného hmotného objektu (napr. hmotný bod v rovine má dva stupne voľnosti → dve DPR a pod.).

### 2.1 DPR hmotného bodu v pravouhlej kartézskej súradnicovej sústave

Ak  $\mathbf{a}$  je zrýchlenie,  $\mathbf{F}$  je sila, potom ich zložky v osiach pravouhlej kartézskej súradnicovej sústavy  $0, x, y, z$ ,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  so začiatkom v bode 0, osami  $x, y, z$  s jednotkovými vektormi  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  (obr. 2.1):

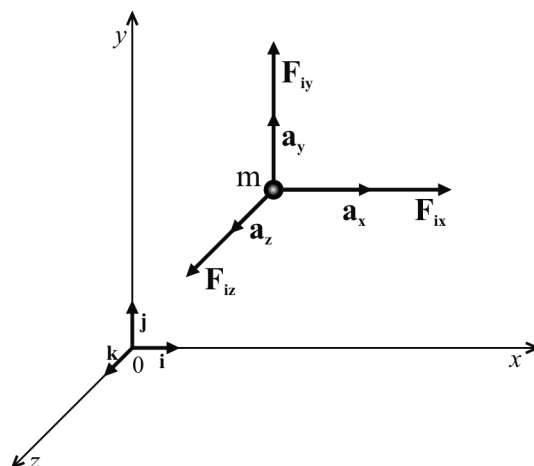
$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k},$$

kde

$$a_x = \ddot{x}, \quad a_y = \ddot{y}, \quad a_z = \ddot{z},$$
$$F_x = \sum_i F_{ix}, \quad F_y = \sum_i F_{iy}, \quad F_z = \sum_i F_{iz}.$$

Zložkové dynamické pohybové rovnice (DPR) sú:

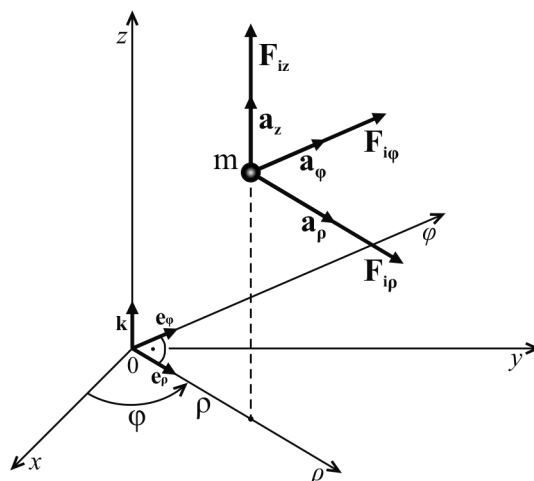
$$\begin{aligned} ma_x &= F_x, & \text{resp.} & & m\ddot{x} &= \sum_i F_{ix}, \\ ma_y &= F_y, & & & m\ddot{y} &= \sum_i F_{iy}, \\ ma_z &= F_z, & & & m\ddot{z} &= \sum_i F_{iz}. \end{aligned}$$



Obr. 2.1

## 2.2 DPR hmotného bodu vo valcovej (resp. polárnej) súradnicovej sústave

Vo valcovej súradnicovej sústave (obr. 2.2)



Obr. 2.2

je vyjadrenie zrýchlenia  $\mathbf{a}$  a sily  $\mathbf{F}$  pomocou ich zložiek:

$$\mathbf{a} = a_\rho \mathbf{e}_\rho + a_\phi \mathbf{e}_\phi + a_z \mathbf{k}, \quad \mathbf{F} = F_\rho \mathbf{e}_\rho + F_\phi \mathbf{e}_\phi + F_z \mathbf{k},$$

čo po rozpísaní v skalárnom tvare vedie k zložkovým DPR:

$$ma_\rho = \sum F_{i\rho} ,$$

$$ma_\varphi = \sum F_{i\varphi} ,$$

$$ma_z = \sum F_{iz} .$$

Po dosadení vzťahov známych z kinematiky pre jednotlivé zložky zrýchlenia

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2 , \quad a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi} , \quad a_z = \ddot{z}$$

dostávame DPR v tvare

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = F_\rho ,$$

$$m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = F_\varphi ,$$

$$m\ddot{z} = F_z .$$

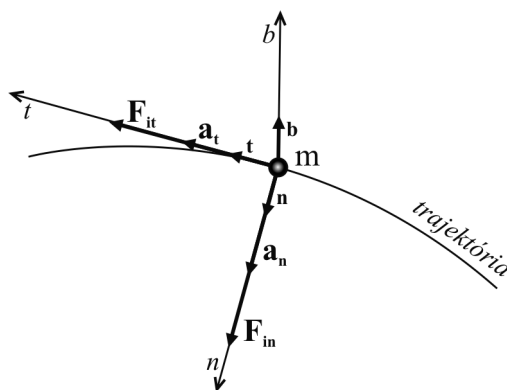
Ak skúmame pohyb hmotného bodu v rovine (napr. v rovine  $xy$ ), kedy je zložka zrýchlenia a rýchlosti v smere osi kolmej na rovinu pohybu nulová ( $\ddot{z} = \dot{z} = 0$ ), potom hovoríme o skúmaní pohybu hmotného bodu v **polárnych súradniciach** a pre hmotný bod píšeme dve DPR:

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2) = F_\rho$$

$$m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}) = F_\varphi .$$

## 2.3 DPR hmotného bodu v prirodzenej súradnicovej sústave

Prirodzená súradnicová sústava má osi orientované v smere dotyčnice, normály a binormály k trajektórii pohybu hmotného bodu, so začiatkom v jeho okamžitej polohe (obr.2.3), kde **t, n, b** sú jednotkové vektory v smere jednotlivých osí.



Obr.2.3

Pre výsledné zrýchlenie **a** a výslednú silu **F** platí

$$\mathbf{a} = a_t \mathbf{t} + a_n \mathbf{n} ,$$



$$\mathbf{F} = F_t \mathbf{t} + F_n \mathbf{n} + F_b \mathbf{b},$$

pričom

$$a_t = \dot{v} = \ddot{s} = \frac{dv}{dt},$$

$$a_n = \frac{\dot{s}^2}{R}, \quad a_b = 0,$$

kde  $s$  je krivočiara súradnica hmotného bodu,

$v = \dot{s}$  rýchlosť hmotného bodu,

$R$  polomer flexnej krivosti v okamžitej polohe hmotného bodu.

Potom zložkové DPR hmotného bodu budú

$$m a_t = F_t,$$

$$m a_n = F_n,$$

$$0 = F_b.$$

## 2.4 Základné vety dynamiky hmotného bodu

DPR rovnice sa dajú písať aj s využitím iných vzťahov okrem Newtonovho zákona sily.

### 2.4.1 Veta o zmene hybnosti

Ak sa pohybový stav hmotného bodu, určený jeho hybnosťou  $\mathbf{H}$ , v čase mení, potom platí

$$\mathbf{H} - \mathbf{H}_0 = \sum \mathbf{I}_i,$$

čo je matematickým vyjadrením vety o zmene hybnosti, kde

$\mathbf{H}_0$  je hybnosť hmotného bodu na začiatku časového intervalu,

$\mathbf{H}$  hybnosť hmotného bodu na konci časového intervalu,

$\mathbf{I}_i$  impulz sily  $\mathbf{F}_i$ .

Rozdiel  $\mathbf{H} - \mathbf{H}_0$  na ľavej strane rovnice môže nastať len vtedy, ak na hmotný bod budú po istý čas pôsobiť také vonkajšie sily, ktoré vyvolajú zmenu jeho pohybového stavu (t.j. zrýchlenie alebo spomalenie) pri jeho krivočiarom pohybe v rovine alebo v priestore.

Impulz sily je definovaný ako súčin sily a času jej pôsobenia na hmotný bod. Ak sú pôsobiace sily v časovom intervale nemenné, potom môžeme písať

$$\mathbf{I}_i = \mathbf{F}_i \Delta t,$$

ak sú sily funkciou času, potom píšeme

$$\mathbf{I}_i = \int_0^t \mathbf{F}_i dt.$$

V zložkovom vyjadrení môžeme vetu o zmene hybnosti napísať

$$H_x - H_{x0} = \int_0^t (\sum F_{ix}) dt,$$

$$H_y - H_{y0} = \int_0^t (\sum F_{iy}) dt,$$

$$H_z - H_{z0} = \int_0^t (\sum F_{iz}) dt,$$

kde  $H_x = mv_x$ ,  $H_y = mv_y$ ,  $H_z = mv_z$ .

#### 2.4.2 Veta o zmene momentu hybnosti

Moment hybnosti  $\mathbf{L}$  je daný vzťahom

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v},$$

kde  $\mathbf{r}$  je polohový vektor,

$\mathbf{v}$  rýchlosť.

Potom časová zmena momentu hybnosti je

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \mathbf{M}_i, \quad \text{resp.} \quad \mathbf{L} - \mathbf{L}_0 = \sum \mathbf{I}_i^M,$$

kde  $\mathbf{I}_i^M = \int_0^t \mathbf{M}_i dt$  je impulz momentu sily  $\mathbf{F}_i$  k začiatku za čas  $t$ .

V zložkovom vyjadrení bude

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum M_{ix},$$

$$\frac{dL_y}{dt} = \sum M_{iy},$$

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum M_{iz},$$

kde  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$  sú momenty hybnosti k osiam  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,

$M_{ix}$ ,  $M_{iy}$ ,  $M_{iz}$  momenty sily k osiam  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

#### 2.4.3 Veta o zmene kinetickej energie

Ak označíme  $E_k = \frac{1}{2}mv^2$  a budeme tomu hovoriť kinetická energia (hmotného

body), potom sa dá napísať vzťah

$$E_k - E_{k0} = A,$$

ktorý vyjadruje matematický zápis vety o zmene kinetickej energie. Rozdiel  $E_k - E_{k0}$  vo veľkosti kinetickej energie (pohybujúceho sa hmotného bodu) môže nastať len vtedy, keď na neho pôsobia vonkajšie sily, ktoré vykonávajú prácu  $A$ .

Potom vetu možno zapísať v tvare

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_{s_0}^s F_t ds.$$

#### 2.4.4 Veta o zachovaní mechanickej energie

Ak konajú pri pohybe hmotného bodu prácu len konzervatívne sily (t. j. gravitačné potenciálne resp. v pružine), potom sa celková mechanická energia (ako súčet kinetickej a potenciálnej energie) nemení, čiže platí

$$E_k + E_p = \text{konšt.},$$

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2} = E_c = \text{konšt.}$$

#### 2.4.5 Práca, výkon

Práca je definovaná ako skalárny súčin vektora sily  $\mathbf{F}$  a vektora elementárnej zmeny  $d\mathbf{r}$  polohového vektora

$$dA = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Celková práca sily  $\mathbf{F}$  pri zmene polohy pôsobiska sily z polohy  $\mathbf{r}_0$  do polohy  $\mathbf{r}$  je určená

$$A = \int_{r_0}^r \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

Ak sila  $\mathbf{F}$  pôsobí na hmotný bod, ktorý sa pohybuje po trajektórii (krivočiarej)  $k$ , tak vektor  $d\mathbf{r}$  má smer dotyčnice k trajektórii v danom mieste a pre elementárnu prácu platí

$$dA = |\mathbf{F}| |d\mathbf{r}| \cos \varphi = F_t ds,$$

kde  $F_t = F \cos \varphi$  je priemet sily do smeru dotyčnice k trajektórii.

Potom celková práca je

$$A = \int_{s_0}^s F_t ds,$$

kde  $s_0$  a  $s$  sú krivočiare súradnice pôsobiska sily v jeho začiatočnej a všeobecnej polohe. Jednotkou práce je 1 Joule (1J),

$$[A] = [F][s] = 1\text{N} \cdot 1\text{m} = 1\text{kg} \cdot 1\text{m} \cdot 1\text{s}^{-2} \cdot \text{m} = 1\text{kgm}^2\text{s}^{-2} = 1\text{J}.$$

Okamžitý výkon sily  $\mathbf{F}$  je definovaný vzťahom

$$P = \frac{dA}{dt},$$

ktorý určuje množstvo vykonanej práce za jednotku času. Okamžitý výkon môže byť vyjadrený aj v tvare

$$P = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \mathbf{v}.$$

Jednotkou výkonu je 1 Watt (1W),

$$[P] = [F][v] = 1\text{N} \cdot 1\text{m} \cdot 1\text{s}^{-1} = 1\text{kg} \cdot 1\text{m} \cdot 1\text{s}^{-2} \cdot 1\text{m} \cdot 1\text{s}^{-1} = 1\text{kgm}^2\text{s}^{-3} = 1\text{W}.$$

## 2.5 Príklady (priama úloha dynamiky)

- poznáme pohyb, hľadáme sily

### Príklad 2.1

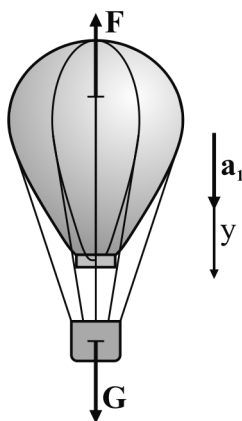
Balón o tiaži  $G$  klesá zrýchlením  $a_1 \leq g$  za pôsobenia vztlakovej sily (plynovej náplne balóna)  $F$ . Určte, akú záťaž je potrebné odhodiť, aby balón stúpал zrýchlením  $a_2$ . Odpor prostredia (odpor vzduchu, vietor) zanedbajte.

Dané hodnoty:  $m = 1500 \text{ kg}$ ,  $a_1 = 0,5 \text{ ms}^{-2}$ ,  $a_2 = 0,1 \text{ ms}^{-2}$ .

#### **Riešenie:**

Riešenie rozdelíme na dve fázy: klesanie a stúpanie.

#### a) Klesanie balóna



Obr.2.4

#### 1. Uvoľnenie

Na balón pôsobí vztlaková sila  $F$  a tiažová sila  $G$  (balóna a celého nákladu). Poznáme orientáciu a smer zrýchlenia  $a_1$  a súhlasne s ním orientujeme kladnú os  $y$ .

Keďže ide o priamkovú silovú sústavu, ktorá pôsobí na hmotný bod (už nemusíme brať do úvahy tvar a veľkosť celého balóna), v ďalšom riešime pohyb jedného hmotného bodu pohybujúceho sa priamočiari (v smere osi  $y$ ), zrýchlene.

2. DPR – pre priamočiary pohyb hmotného bodu vieme napísať jednu DPR (napr. s využitím Newtonovho zákona sily), teda:

$$y \dots m a_y = \sum F_{iy} ,$$

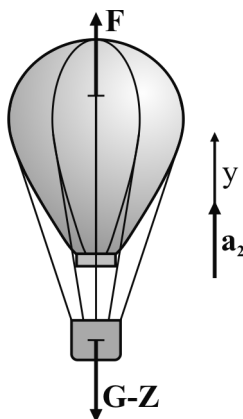
odkiaľ po dosadení dostávame DPR pre tento prípad pohybu balóna v tvare

$$m a_1 = F - G .$$

### b) Stúpanie balóna

#### 1. Uvoľnenie

Aby sa klesanie balóna zmenilo na stúpanie, je potrebné sa zbaviť časti jeho záťaže (Z). Poznáme orientáciu a smer zrýchlenia  $a_2$  a súhlasne s ním orientujeme kladnú os  $y$ . Pôsobiace sily tvoria priamkovú silovú sústavu, pričom hmotný bod sa pohybuje priamočiari, zrýchlene.



Obr.2.5

2. DPR – pre priamočiary pohyb hmotného bodu vieme napísať jednu DPR:

$$y \dots m a_y = \sum F_{iy} ,$$

odkiaľ po dosadení dostávame DPR pre tento prípad pohybu balóna v tvare

$$\frac{G-Z}{g} a_z = F - (G-Z) .$$

Úpravou dostávame vzťah pre výpočet veľkosti záťaže  $Z$ , ktorú je potrebné vyhodiť tak, aby balón zmenil klesanie so zrýchlením  $a_1$  na stúpanie so zrýchlením  $a_2$ , teda

$$Z = G \frac{a_1 + a_2}{g + a_2} = 890,9 \text{ N} .$$

Cieľom tohto príkladu nebolo komplexne riešiť problematiku istenia balónom, ale metodicky ukázať postup uvoľňovania a zostavovania DPR.

### **Príklad 2.2**

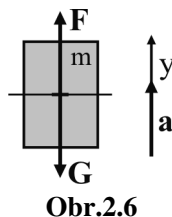
Vypočítajte tiaž breмена (napr. pasažiera) v pokoji, ktorý sa nachádza vo výťahovej kabíne pohybujúcej sa hore resp. dole zrýchlením  $a$ , pričom vieme merať silu  $F$  resp.  $F_1$ , ktorou bremeno (pasažier) pôsobí na podlahu výťahu.

Dané hodnoty:  $F = 810,75 \text{ N}$  – sila pri stúpaní výťahu,  $F_1 = 660,75 \text{ N}$  – sila pri klesaní výťahu,  $a = 1 \text{ ms}^{-2}$

#### **a) Stúpanie výťahu**

##### **1. Uvoľnenie**

Sila  $F$  je tá, ktorou bremeno pôsobí na podlahu výťahu. Poznáme smer a orientáciu zrýchlenia pohybu výťahu a súhlasne s ním orientujeme kladnú os  $y$ . Pôsobiace sily tvoria priamkovú silovú sústavu, takže výťah môžeme považovať za hmotný bod, ktorý sa bude pohybovať priamočiaro, zrýchlene.



**Obr.2.6**

2. DPR – v smere osi  $y$  píšeme jednu DPR s využitím Newtonovho zákona sily, t.j. :

$$y \dots m a_y = \sum F_{iy},$$

odkiaľ po dosadení dostávame

$$\frac{G}{g} a = F - G.$$

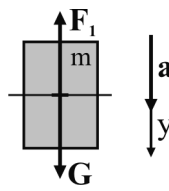
Potom tiaž breмена pri stúpaní výťahu

$$G = \frac{Fg}{a + g} = 735,75 \text{ N}.$$

#### **b) Klesanie výťahu**

##### **1. Uvoľnenie**

Pri uvoľnení postupujeme podobne ako v prípade stúpania výťahu. Mení sa len orientácia zrýchlenia  $a$ .



Obr.2.7

2. DPR – v smere osi  $y$  píšeme jednu DPR

$$y \dots m a_y = \sum F_{iy},$$

odkiaľ po dosadení dostávame

$$\frac{G}{g} a = G - F_1.$$

Potom tiaž bremena pri klesaní výťahu

$$G = \frac{F_1 g}{g - a} = 735,75 \text{ N}.$$

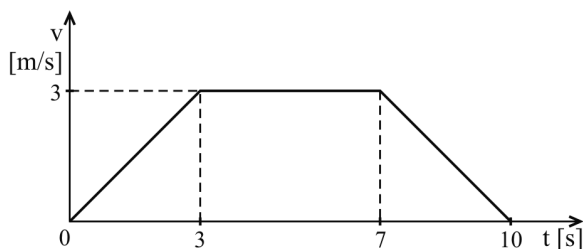
Je zrejmé, že v oboch prípadoch (klesanie, stúpanie výťahu) musí vyjsť tiaž bremena  $G$  (v pokoji) rovnaká.

Za zamyslenie stojí prípad, kedy sa bude výťah pohybovať nadol so zrýchlením, ktoré sa rovná gravitačnému zrýchleniu. Potom výraz v menovateli  $g - a = 0$ , z čoho vyplýva, že bremeno (pasažier) v kabíne voľne „poletuje“, teda je v stave tzv. „beztláže“ resp. v „beztáhovom“ stave. Pojmy sú uvedené v úvodzovkách preto, lebo z pohľadu mechaniky nejde o stav „bez“ tláže, pretože tiaž sa nestráca, nemizne. V skutočnosti ide o rovnovážny stav medzi silami odstredivými a gravitačnými, podobne ako je to pri pobyte kozmonautov na obežnej dráhe v svojej kabíne.

### **Príklad 2.3**

Je dosť obvyklé, že pohyb výťahu (napr. jeho rýchlosť) sa zobrazuje v podobe diagramu a je potrebné určiť sily v závese kabíny pri rozbehu, rovnomernom chode a zastavení výťahu pri jeho pohybe hore.

Dané hodnoty:  $m = 480 \text{ kg}$

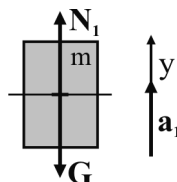


Obr.2.8

a) Rozbeh výťahu

1. Uvoľnenie

Na výťah pôsobí tiažová sila  $G$  a sila  $N_1$  v závese (lane), ktoré tvoria priamkovú silovú sústavu (obr.2.9), takže výťah môžeme považovať za hmotný bod pohybujúci sa priamočiaro, zrýchlene. Poznáme zrýchlenie  $a_1$ , v smere ktorého orientujeme kladnú os  $y$ .



Obr.2.9

2. DPR – s využitím Newtonovho zákona sily, v smere osi  $y$  bude

$$y \dots ma_y = \sum F_i,$$

po dosadení dostávame

$$ma_1 = -G + N_1,$$

odtiaľ

$$N_1 = ma_1 + G = ma_1 + mg = m(a_1 + g).$$

Keďže v tejto jednej rovnici sú dve neznáme ( $N_1, a_1$ ) je potrebné doplniť ďalšie vzťahy. Pasívne odpory v tomto prípade nevieme využiť. Poznáme ale časový priebeh rýchlosti. Keďže ide o pohyb hmotného bodu s konštantným zrýchlením, vieme z kinematiky odvodiť

$$a_1 = \frac{dv}{dt} = \text{konšt.},$$

z ktorej po separácii premenných  $a_1 dt = dv$  a následnej integrácii  $\int_0^{t_1} a_1 dt = \int_0^v dv$  dostávame

$$a_1 t_1 = v \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{v}{t_1} = \frac{3 \text{ ms}^{-1}}{3 \text{ s}} = 1 \text{ ms}^{-2}.$$

Potom sila v závese

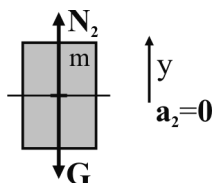
$$N_1 = m(a_1 + g) = 480(1 + 9,81) = 5188,8 \text{ N}.$$



### b) Rovnomerný chod výťahu

#### 1. Uvoľnenie

Na výťah pôsobí tiažová sila  $G$  a sila  $N_2$  v závese, ktoré tvoria priamkovú silovú sústavu (obr.2.10). Hmotný bod sa pohybuje priamočiari, rovnomerne. Zrýchlenie je v tomto prípade rovné nule, takže orientáciu osi  $y$  môžeme voliť ľubovoľne.



Obr.2.10

2. DPR – s využitím Newtonovho zákona sily, v smere osi  $y$  bude

$$y \dots ma_y = \sum F_{iy}$$

po dosadení dostávame

$$0 = \sum F_{iy} = N_2 - G.$$

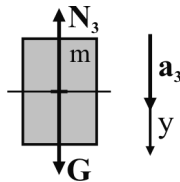
Potom sila v závese

$$N_2 = G = mg = 4708,8 \text{ N}.$$

### c) Zastavenie výťahu

#### 1. Uvoľnenie

Na výťah pôsobí tiažová sila  $G$  a sila  $N_3$  v závese, ktoré tvoria priamkovú silovú sústavu (obr.2.11). Hmotný bod sa v tomto prípade pohybuje priamočiari, spomalene. Poznáme smer a orientáciu zrýchlenia  $a_3$ , súhlasne s jeho orientáciou orientujeme kladnú os  $y$ .



Obr.2.11

2. DPR – píšeme ju v smere osi  $y$  s využitím Newtonovho zákona sily

$$ma_y = \sum F_{iy},$$

po dosadení dostávame

$$ma_3 = G - N_3.$$

Potom sila v závese

$$N_3 = -ma_3 + G = m(-a_3 + g) = 4228,8 \text{ N.}$$

Zrýchlenie (resp. spomalenie)  $a_3$  určíme analogicky ako v prípade rozbehu výťahu.

Okrem úzko dynamickej stránky tohto príkladu je na zamyslenie aj iný inžiniersky pohľad. Ide o tú istú kabínu, akurát sa mení pohyb (zrýchlený, rovnomerný, spomalený). Ak zoberieme do úvahy, koľkokrát za deň alebo inú časovú jednotku sa opakuje tento cyklus resp. zaťaženie mechanickej sústavy (vrátane pohonu), potom je vhodné sa zamyslieť nad dimenzovaním prvkov sústavy aj z iných hľadísk, napr. z hľadiska únavy, cyklického zaťaženia, opotrebenia a pod.

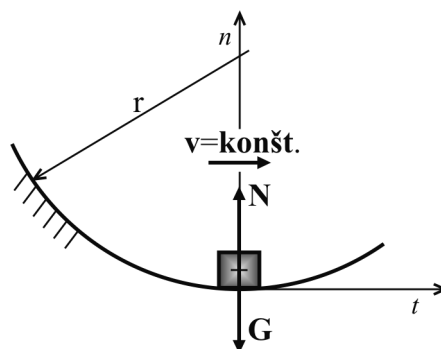
#### **Príklad 2.4**

Osobné auto o tiaži  $G$  sa pohybuje po vertikálne zakrivenej trajektórii (nazvime to dnom oblúka) o polomere  $r$  konštantnou rýchlosťou  $v$ . Je potrebné vypočítať silu, ktorou vozovka pôsobí na auto v najnižšom mieste oblúka. Odpor vzduchu a ďalšie pasívne odpory zanedbajte.

Dané hodnoty:  $G = 13,5 \text{ kN}$ ,  $r = 100 \text{ m}$ ,  $v = 70 \text{ km/hod.}$

##### 1. Uvoľnenie

Auto môžeme považovať za hmotný bod, pretože naň pôsobí jeho vlastná tiaž  $G$  a normálová reakcia vozovky  $N$ , ktoré tvoria priamkovú silovú sústavu. Hmotný bod sa pohybuje po kružnici o polomere  $r$ , rovnomerne ( $v = \text{konšt.}$ ). Zakreslíme prirodzený súradnicový systém, ktorého osi sú orientované v smere dotyčnice  $t$  (ku kružnici) a normály  $n$ .



Obr. 2.12

2. DPR – píšeme ich s využitím Newtonovho zákona sily v smeroch osí  $t, n$  (pretože hmotný bod má v rovine dva stupne voľnosti):

$$t \dots m a_t = \sum F_{it} = 0,$$

$$n \dots m a_n = \sum F_{in} = 0,$$

z kinematiky poznáme vzťah pre určenie normálovej zložky zrýchlenia pri pohybe po kružnici

$$a_n = \frac{v^2}{r}, \text{ po dosadení}$$

$$m \frac{v^2}{r} = N - G, \text{ po úprave}$$

$$\frac{G}{g} \cdot \frac{v^2}{r} = N - G$$

$$N = G \left( 1 + \frac{v^2}{rg} \right) = 18\,703,02 \text{ N}.$$

Číselne hodnoty dosadzujeme v základných jednotkách, čiže rýchlosť v  $\text{ms}^{-1}$ .

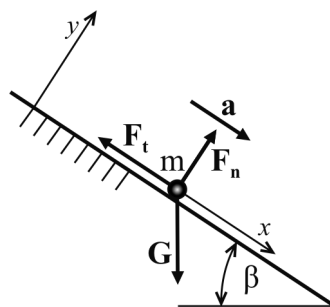
### **Príklad 2.5**

Pohyb bremena o tiaži  $G$  po drsnej naklonenej rovine je určený parametrickou rovnicou  $x = bgt^2$ , kde  $b$  je konštanta,  $g$  je gravitačné zrýchlenie,  $t$  je čas. Vypočítajte veľkosť tangenciálnej zložky šmykového odporu naklonenej roviny.

Dané hodnoty:  $x = bgt^2$ ,  $b = 0,1$ ;  $G = 1500 \text{ N}$ ,  $\beta = 40^\circ$ .

#### **1. Uvoľnenie**

Vo všeobecnom časovom okamihu pôsobia na bremeno sily tiaže  $G$ , zložky šmykového odporu naklonenej roviny, tangenciálna  $F_t$  a normálová  $F_n$ . Poznáme smer a odhadujeme orientáciu zrýchlenia  $a$  a v súlade s ním volíme smer a orientáciu osi  $x$ . Silová sústava je centrálna rovinná, pôsobiaca na jeden bod (CRSS/1). Hmotný bod sa pohybuje v rovine  $xy$  priamočiaro, v smere osi  $x$  zrýchlene.



**Obr. 2.13**

2. DPR – hmotný bod má v rovine dva stupne voľnosti. S využitím Newtonovho zákona sily vieme v smere osí  $x, y$  napísať dve dynamické pohybové rovnice

$$x \dots ma_x = \sum F_{ix},$$

$$y \dots ma_y = \sum F_{iy},$$

po úprave, zrýchlenie v smere osi  $y$   $a_y = 0$ , bude

$$ma = G \sin \beta - F_t,$$

$$0 = -G \cos \beta + F_n,$$

$$F_t = G \sin \beta - ma.$$

V tejto rovnici sú dve neznáme ( $F_t, a$ ), viac nezávislých DPR nevieme napísať, preto ďalšie vzťahy hľadáme v oblasti zákonitostí pohybu. Je známa parametrická rovnica pohybu  $x = bgt^2$ , odkiaľ dvojnásobným derivovaním dostávame zrýchlenie v smere osi  $x$

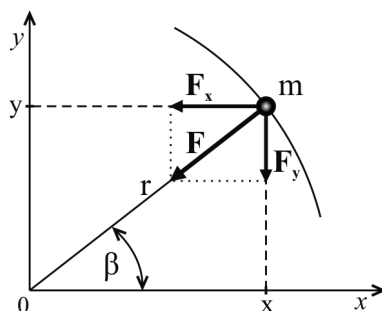
$$x = bgt^2 \rightarrow \dot{x} = 2bgt \rightarrow \ddot{x} = 2bg,$$

$$F_t = G \sin \beta - 2mbg = G \sin \beta - 2 \frac{G}{g} bg = 664,18 \text{ N}.$$

### **Príklad 2.6**

Hmotný bod o hmotnosti  $m$  sa pohybuje po vodorovnej hladkej podložke. Jeho pohyb je určený parametrickými rovnicami pohybu  $x = c \cos(kt)$ ,  $y = b \sin(kt)$ , kde  $c, b, k$  sú konštanty. Je potrebné určiť silu  $F$  pôsobiacu na hmotný bod, ak je funkciou len polohy bodu.

1. Uvoľnenie



**Obr. 2.14**

Bod sa pohybuje vo vodorovnej hladkej (neuvažujeme s pasívnymi odpormi) rovine  $xy$ . Pôsobí na neho sila  $F$ , ktorú vieme rozložiť na zložky v smeroch osí  $x, y$  (orientáciu

sily a jej smer sme si zvolili). Bod sa pohybuje krivočiarno (súdiac podľa parametrických rovníc) a zrýchlene, pretože minimálne normálová zložka zrýchlenia bude nenulová.

2. DPR – hmotný bod má v rovine dva stupne voľnosti, s využitím Newtonovho zákona sily vieme napísať najviac dve lineárne nezávislé dynamické pohybové rovnice

$$x \dots ma_x = \sum F_{ix},$$

$$y \dots ma_y = \sum F_{iy},$$

$$ma_x = -F_x,$$

$$ma_y = -F_y.$$

Pretože v týchto dvoch rovniciach sú až štyri neznáme  $(F_x, F_y, a_x, a_y)$ , hľadáme možnosti dopísať aspoň dve podmienky (rovnice) z kinematiky pohybu, napr. zo známych parametrických rovníc, odkiaľ po dvojnásobnej derivácii

$$x = c \cos(kt), \quad y = b \sin(kt),$$

$$\dot{x} = -ck \sin(kt), \quad \dot{y} = bk \cos(kt),$$

$$\ddot{x} = -ck^2 \cos(kt), \quad \ddot{y} = -bk^2 \sin(kt),$$

po dosadení DPR budú:

$$F_x = mck^2 \cos(kt),$$

$$F_y = mbk^2 \sin(kt).$$

Ak uvážime, že  $x = c \cos(kt)$ ,  $y = b \sin(kt)$ , po úprave budú DPR

$$F_x = mk^2 x, \quad F_y = mk^2 y.$$

Výsledná sila pôsobiaca na hmotný bod je

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = mk^2 \sqrt{x^2 + y^2} = mk^2 r,$$

smer pôsobiacej sily určíme napr.  $\cos \beta = \frac{F_x}{F} = \frac{x}{r}$ .

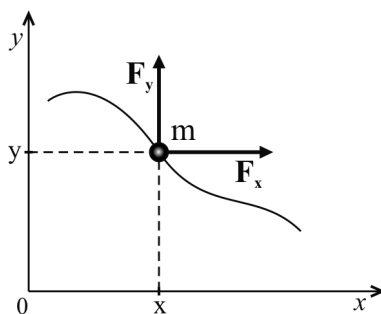
Z riešenia vyplýva, že na hmotný bod pôsobí sila  $F$  orientovaná tak, ako sme si zvolili a hmotný bod sa pohybuje po kružnici o polomere  $r$ .

### **Príklad 2.7**

Pohyb hmotného bodu po vodorovnej hladkej podložke je určený parametrickými rovnicami  $x = ct$ ,  $y = bt$ , kde  $c, b$  sú konštanty,  $t$  je čas. Určte silu, ktorá spôsobuje jeho pohyb.

## 1. Uvoľnenie

Na hmotný bod pôsobí neznáma sila, to znamená, že nepoznáme jej veľkosť, smer a ani orientáciu. Silu rozložíme na zložky  $F_x, F_y$ , ktorých orientáciu si zvolíme ľubovoľne. Keďže nepoznáme trajektóriu pohybu hmotného bodu, budeme predpokladať všeobecnejší prípad pohybu, teda krivočiary pohyb v rovine, zrýchlený.



Obr. 2.15

2. DPR – hmotný bod má v rovine dva stupne voľnosti, preto môžeme s využitím Newtonovho zákona sily písať najviac dve lineárne nezávislé dynamické pohybové rovnice

$$x \dots ma_x = \sum F_{ix},$$

$$y \dots ma_y = \sum F_{iy},$$

$$ma_x = F_x,$$

$$ma_y = F_y.$$

V týchto dvoch rovniciach sú štyri neznáme ( $F_x, F_y, a_x, a_y$ ) preto hľadáme ďalšie minimálne dve rovnice. Bod sa pohybuje po hladkej ploche, čo znamená, že pasívne odpory sa nedajú použiť. Sú ale známe parametrické rovnice pohybu, odkiaľ po dvojnásobnej derivácii (podľa času) určíme zložky zrýchlenia

$$x = ct, \quad y = bt,$$

$$\dot{x} = c, \quad \dot{y} = b,$$

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = 0,$$

potom DPR nadobudnú tvar  $0 = F_x, \quad 0 = F_y$ , čo znamená, že sila (vonkajšia) pôsobiaca na hmotný bod má nulovú veľkosť, teda hmotný bod sa pohybuje zotrvačnosťou, rovnomerne, priamočiario.

**Príklad 2.8**

Hmotný bod o hmotnosti  $m = 4$  kg sa pohybuje po hladkej horizontálnej priamke so zrýchlením  $a = 0,3t$ . Určte veľkosť sily pôsobiacej na bod v smere jej pohybu v čase  $t_1 = 3$  s.

(3,6 N)

**Príklad 2.9**

Súčiastka (považujeme ju za hmotný bod) sa klže po hladkej naklonenej rovine. Určte uhol sklonu naklonenej roviny  $\beta$ , aby sa súčiastka pohybovala so zrýchlením  $a = 2 \text{ ms}^{-2}$ .

(11,76 stupňa)

**Príklad 2.10**

Bremeno (považované za hmotný bod) je uchytené na lane a dvíhame ho vertikálne so zrýchlením  $a = 0,5 \text{ ms}^{-2}$ . Určte silu v lane.

(516 N)

**Príklad 2.11**

Určte veľkosť sily pôsobiacej na hmotný bod o hmotnosti  $m = 3$  kg v čase  $t = 6$  s, ktorá sa pohybuje priamočiarno v smere osi  $x$  podľa parametrickej rovnice  $x = 0,04t^3$ .

(4,32 N)

**Príklad 2.12**

Hmotný bod o hmotnosti  $m = 1,4$  kg sa pohybuje priamočiarno podľa parametrickej rovnice  $x = 6t^2 + 6t + 3$ . Určte veľkosť sily pôsobiacej na bod.

(16,8 N)

**Príklad 2.13**

Hmotný bod o hmotnosti  $m = 10$  kg sa pohybuje v smere osi  $x$  podľa parametrickej rovnice  $x = 5 \sin(0,2t)$ . Určte veľkosť sily pôsobiacej na bod v čase  $t_1 = 7$  s.

(1,97 N)

**Príklad 2.14**

Hmotný bod o hmotnosti  $m$  sa pohybuje v rovine  $x, y$  podľa parametrických rovníc  $x = bt$ ,  $y = ct$ , kde  $b, c$  sú konštanty. Určte veľkosť sily pôsobiacej na bod.

(0 N)

**Príklad 2.15**

Hmotný bod o hmotnosti  $m = 9$  kg sa pohybuje v rovine  $(xy)$  tak, že jeho pohyb je určený polohovým vektorom  $\mathbf{r} = 0,7t^2\mathbf{i} + 0,5t^2\mathbf{j}$ . Určte veľkosť sily pôsobiacej na bod.

(14,06 N)

**Príklad 2.16**

Pohyb hmotného bodu o hmotnosti  $m = 8$  kg v horizontálnej rovine  $(xy)$  je určený parametrickými rovnicami  $x = 0,05t^3$ ,  $y = 0,3t^2$ . Určte veľkosť pôsobiacej sily na bod v čase  $t_1 = 4$  s

(10,73 N)

**Príklad 2.17**

Hmotný bod o hmotnosti  $m = 14$  kg sa pohybuje po kružnici o polomere  $R = 7$  cm s konštantným tangenciálnym zrýchlením  $a_t = 0,5 \text{ ms}^{-2}$ . Určte veľkosť pôsobiacej sily na bod v čase  $t_1 = 4$  s, ak v čase  $t_0 = 0$  s je rýchlosť  $v_0 = 0 \text{ ms}^{-1}$ .

(10,63 N)

**Príklad 2.18**

Hmotný bod o hmotnosti  $m = 1$  kg sa pohybuje po kružnici o polomere  $r = 2$  m s rýchlosťou  $v = 2t$ . Určte veľkosť pôsobiacej sily na bod v čase  $t = 1$  s.

(2,83 N)

**Príklad 2.19**

K bremenu (považovanému za hmotný bod) je uchytená niť, za ktorú bremeno dvíhame vertikálne. Akým najmenším zrýchlením musíme bremeno (prostredníctvom nite) dvíhať, aby sa niť pretrhla, ak jej sila pretrhnutia má veľkosť  $N = 42$  N?

(4,2  $\text{ms}^{-2}$ )

**Príklad 2.20**

V šachte sa spúšťa rovnomerne zrýchlene výťah o hmotnosti  $m = 280$  kg. Za prvých 10 s prejde 35m. Určte osovú silu v lane, na ktorom je výťah zavesený.

(2548 N)



### **Príklad 2.21**

Auto o hmotnosti  $m = 1000$  kg sa pohybuje po vypuklom moste (vo vertikálnej rovine) rýchlosťou  $v = 10 \text{ ms}^{-1}$ . Polomer krivosti mosta je  $\rho = 50$  m. Určte silu, ktorou auto pôsobí na most v momente prechodu cez stred mosta.

(7800 N)

### **Príklad 2.22**

V kabíne výťahu je bremeno. Jeho silu, ktorou pôsobí na podlahu kabíny vieme určiť. Pri pohybe kabíny hore zrýchlene, je to sila 51 N, pri rovnomernom pohybe sila 50 N. Aké bolo zrýchlenie kabíny.

( $0,186 \text{ ms}^{-1}$ )

### **Príklad 2.23**

Pohyb hmotného bodu o hmotnosti  $m = 0,2$  kg v rovine ( $xy$ ) je určený parametrickými rovnicami  $x = 3 \cos(2\pi t)$ ,  $y = 4 \sin(\pi t)$ . Určte zložky sily pôsobiacej na hmotný bod v závislosti od polohy bodu.

( $F_x = -0,078x \text{ N}$ ,  $F_y = -0,018y \text{ N}$ )

## **2.6 Príklady (nepriama úloha dynamiky)**

- **poznáme sily, hľadáme pohyb**

Obrátená úloha dynamiky. Inverzná úloha dynamiky.

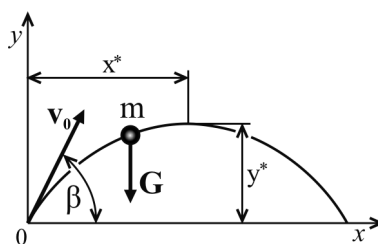
### **Príklad 2.24**

Bremeno (budeme ho považovať za hmotný bod) je hodené (vystrelené a pod.) pod uhlom  $\beta$  k horizontu začiatočnou rýchlosťou  $v_0$ . Určte rovnicu trajektórie jeho pohybu. Odpor vzduchu zanedbajte.

Dané hodnoty:  $m = 0,5 \text{ kg}$ ,  $v_0 = 5 \text{ ms}^{-1}$ ,  $\beta = 30^\circ$

#### **1. Uvoľnenie**

Hmotný bod sa pohybuje vo vertikálnej rovine  $xy$ , pričom na neho pôsobí sila vlastnej tiaže  $G$ . Ide o centrálnu rovinnú sústavu. Jeho pohyb je krivočiary, rovinný, zrýchlený.



Obr.2.16

2. DPR – hmotný bod má v rovine dva stupne voľnosti, preto môžeme napísať najviac dve lineárne nezávislé DPR v smeroch osí  $x, y$  s využitím Newtonovho zákona sily

$$x \dots ma_x = \sum F_{ix}, \quad y \dots ma_y = \sum F_{iy},$$

po dosadení

$$ma_x = 0, \quad ma_y = -G,$$

po úprave a ak označíme  $a_x = \ddot{x}$ ,  $a_y = \ddot{y}$ , budú mať DPR tvar

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -\frac{G}{m} = -g.$$

Aby sme sa dostali k rovnici trajektórie, t.j. k funkcii  $y = f(x)$ , potrebujeme poznať parametrické rovnice pohybu hmotného bodu v smeroch osí  $x, y$ . Získame ich, ak budeme DPR riešiť ako diferenciálne rovnice druhého rádu.

Sú dve možnosti riešenia – s využitím neurčitého integrálu a s využitím určitého integrálu.

a) Riešenie diferenciálnych rovníc s využitím neurčitého integrálu

$$\ddot{x} = 0, \quad \ddot{y} = -g.$$

Postupne tieto diferenciálne rovnice integrujeme (parametrom je čas  $t$ )

$$\dot{x} = C_1, \quad \dot{y} = -gt + C_3,$$

$$x = C_1t + C_2, \quad y = -g\frac{t^2}{2} + C_3t + C_4,$$

kde  $C_1, C_2, C_3, C_4$  sú integračné konštanty. Tie určíme z okrajových podmienok a keďže ide o časovú závislosť, môžeme hovoriť o začiatočných podmienkach.

Tieto podmienky sú vo forme otázok typu – **čo** poznáme, **čo** je dané, resp. **čo** môžeme odhadnúť (dráha, rýchlosť, zrýchlenie) a **kedy**, t.j. v ktorom časovom okamihu.

Z obr. 2.16 je zrejmé, že na začiatku časového intervalu ( $t = 0$ ), teda keď je hmotný bod v začiatku súradnicovej sústavy, je jeho dráha

$$x=0, \quad (1)$$

$$y=0, \quad (2)$$

a zložky jeho rýchlosti v smeroch osí  $x$  a  $y$  sú

$$\dot{x} = v_0 \cos \beta, \quad (3)$$

$$\dot{y} = v_0 \sin \beta. \quad (4)$$

To znamená, že začiatočné podmienky môžeme zapísať nasledovne:

$$\begin{array}{ll} \text{ak} & t=0, \quad \text{potom} & x=0, \\ & t=0, & y=0, \\ & t=0, & \dot{x}=v_0 \cos \beta, \\ & t=0, & \dot{y}=v_0 \sin \beta. \end{array}$$

Z tejto sústavy štyroch rovníc vieme určiť

$$C_1 = v_0 \cos \beta, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = v_0 \sin \beta, \quad C_4 = 0.$$

Potom parametrické rovnice pohybu hmotného bodu budú

$$x = v_0 t \cos \beta, \quad (A)$$

$$y = v_0 t \sin \beta - g \frac{t^2}{2}. \quad (B)$$

Vylúčením parametra  $t$  z rovníc (A), (B) vieme určiť rovnicu trajektórie pohybu hmotného bodu, t. j. vzťah medzi nezávisle premennou  $x$  a závisle premennou  $y$  (napr. vyjadrením  $t$  z rovnice (A) a dosadením do rovnice (B))

$$y = \frac{x \sin \beta}{\cos \beta} - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \beta}. \quad (C)$$

Po dosadení daných hodnôt bude rovnica trajektórie

$$y = 0,577x - 0,2616x^2,$$

čo je rovnica kvadratickej paraboly obsahujúca aj lineárny člen.

Ak chceme vypočítať maximálnu výšku letu hmotného bodu, potom ide o úlohu určenia lokálneho extrému funkcie (C), teda

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (0,577x - 0,2616x^2) = 0,$$

odkiaľ  $x^* = 1,103$  m, čo je súradnica  $x$ , kde dosahuje funkcia extrém a po dosadení do rovnice (C) určíme aj hodnotu funkcie (teda výšku)  $y^* = 0,318$  m (obr.2.16).

Ak chceme vypočítať pod akým uhlom k horizontu by bolo potrebné hádzať (strieľať a pod.) hmotný bod tak, aby doletel čo najďalej, potom ide o úlohu určiť z rovnice trajektórie (C) lokálny extrém funkcie.

Z rovnice (C) vyjadríme

$$x = \frac{2v_0^2 \cos \beta \cdot \sin \beta}{g},$$

pre určenie lokálneho extrému platí

$$x' = \frac{dx}{d\beta} = \frac{d}{d\beta} \left( \frac{2v_0^2 \cos \beta \cdot \sin \beta}{g} \right) = 0,$$

odkiaľ

$$\sin \beta = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

teda uhol  $\beta = 45^\circ$ .

#### b) Riešenie diferenciálnych rovníc s využitím určitého integrálu

Diferenciálne rovnice

$$\ddot{x} = 0,$$

$$\ddot{y} = -g \text{ prepíšeme do tvaru}$$

$$a_x = 0,$$

$$a_y = -g, \text{ označme}$$

$$\frac{dv_x}{dt} = 0,$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g, \text{ separáciou premenných}$$

$$dv_x = 0,$$

$$dv_y = -g dt, \text{ integrácia oboch strán rovníc}$$

$$\int_{v_0 \cos \beta}^{v_x} dv_x = 0,$$

$$\int_{v_0 \sin \beta}^{v_y} dv_y = \int_0^t -g dt, \text{ riešením}$$

$$v_x = v_0 \cos \beta,$$

$$v_y = v_0 \sin \beta - gt, \text{ ďalším označením}$$

$$\frac{dx}{dt} = v_0 \cos \beta,$$

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \sin \beta - gt, \text{ separáciou premenných}$$

$$\int_0^{x_1} dx = \int_0^t v_0 \cos \beta dt,$$

$$\int_0^{y_1} dy = \int_0^t (v_0 \sin \beta - gt) dt, \text{ riešením}$$

$$x = v_0 t \cos \beta,$$

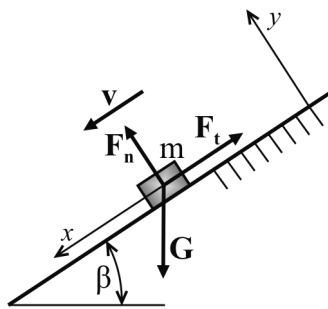
$$y = v_0 t \sin \beta - g \frac{t^2}{2}.$$

Dostávame tie isté parametrické rovnice pohybu (A), (B) ako v predchádzajúcom riešení s využitím neurčitého integrálu. Ďalší postup je rovnaký.

### **Príklad 2.25**

Bremeno o hmotnosti  $m$  (považujeme ho za hmotný bod) sa pohybuje dole drsnou naklonenou rovinou so začiatočnou rýchlosťou  $v_0$ . Vypočítajte dráhu, ktorú pritom prejde za čas  $t_1$ .

Dané hodnoty:  $v_0 = 2 \text{ ms}^{-1}$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $f = 0,4$ .



Obr. 2.17

#### 1. Uvoľnenie

Na bremeno pôsobia sily tiaže  $G$ , zložky šmykového odporu naklonenej roviny, tangenciálna  $F_t$  (orientovaná proti pohybu), normálová  $F_n$ . Tvorí centrálnu rovinnú silovú sústavu (CRSS/1), z čoho vyplýva, že ide o pohyb hmotného bodu, priamočiary o ktorom budeme predpokladať, že je zrýchlený.

#### 2. DPR

S využitím Newtonovho zákona sily pre hmotný bod v rovine (má dva stupne voľnosti) vieme napísať v smeroch osí  $x, y$  dve DPR

$$\begin{aligned} x \dots ma_x &= \sum F_{ix}, & y \dots ma_y &= \sum F_{iy}, \\ m\ddot{x} &= G \sin \beta - F_t, & m \cdot 0 &= F_n - G \cos \beta. \end{aligned}$$

V týchto dvoch rovniciach sú tri neznáme ( $\ddot{x}, F_t, F_n$ ), takže hľadáme ďalší vzťah napr. známy Coulombov vzťah  $F_t = fF_n$  charakterizujúci šmykové trenie medzi bremenom a rovinou a potom zo sústavy troch rovníc vieme určiť

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= G (\sin \beta - f \cos \beta), \\ \ddot{x} &= g (\sin \beta - f \cos \beta). \end{aligned}$$

Aby sme sa dostali až k dráhe, potrebujeme riešiť poslednú diferenciálnu rovnicu (napr. s využitím neurčitého integrálu) jej postupným integrovaním

$$\dot{x} = g(\sin \beta - f \cos \beta)t + C_1,$$

odkiaľ po úprave

$$x = g(\sin \beta - f \cos \beta)\frac{t^2}{2} + C_1 t + C_2.$$

Integračné konštanty určíme zo začiatočných podmienok nasledovne:

$$\text{ak } t = 0, \text{ potom } x = 0, \text{ odkiaľ } C_2 = 0,$$

$$t = 0, \quad \dot{x} = v_0, \quad \text{odkiaľ } C_1 = v_0,$$

potom parametrická rovnica pohybu v smere osi  $x$  bude

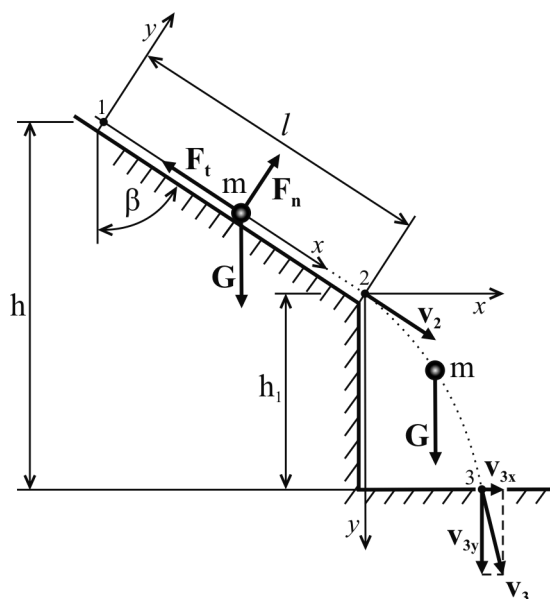
$$x = g(\sin \beta - f \cos \beta)\frac{t^2}{2} + v_0 t,$$

odiaľ po dosadení konkrétnych hodnôt dostávame prejdenu dráhu bremena  $x = 10,02 \text{ m}$ .

### **Príklad 2.26**

Bremeno o hmotnosti  $m$  (považujeme ho za hmotný bod) sa pohybuje po drsnej naklonenej rovine tak, že v bode 2 ju opúšťa a po pohybe vzduchom (jeho odpor zanedbáme) dopadá na vodorovnú podložku v bode 3. Vypočítajte rýchlosti  $v_2$  a  $v_3$  v bodoch 2 a 3.

Dané hodnoty:  $v_1, l, h, \beta, f, m$ .



**Obr. 2.18**

a) Úsek 1-2

1. Uvoľnenie

Na bremeno pôsobí sila jeho tiaže  $G$ , zložky šmykového odporu naklonenej roviny  $F_t$ ,  $F_n$ , teda je to centrálna rovinná silová sústava, takže bremeno môžeme považovať za hmotný bod, ktorý sa pohybuje priamočiarno v rovine  $xy$ , pričom predpokladáme zrýchlený pohyb.

2. DPR

Pre hmotný bod v rovine, ktorý má dva stupne voľnosti, vieme napísať dve lineárne nezávislé dynamické pohybové rovnice v smeroch osí  $x, y$ , napr. s využitím Newtonovho zákona sily

$$\begin{aligned}x \dots ma_x &= \sum F_{ix}, & y \dots ma_y &= \sum F_{iy}, \\ ma_x &= G \cos \beta - F_t, & m \cdot 0 &= F_n - G \sin \beta,\end{aligned}$$

odkiaľ po úprave dostávame

$$a_x = g \cos \beta - \frac{F_t}{m}, \quad F_n = G \sin \beta,$$

čo sú dve DPR, v ktorých sú tri neznáme ( $a_x, F_t, F_n$ ). Z Coulombovho vzťahu vyplýva, že  $F_t = fF_n$ , potom

$$a_x = g \cos \beta - fg \sin \beta = g(\cos \beta - f \sin \beta).$$

Ak chceme určiť rýchlosť hmotného bodu v mieste 2, potom riešime poslednú diferenciálnu rovnicu (napr. s využitím určitého integrálu):

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = g(\cos \beta - f \sin \beta),$$

separáciou premenných a integráciou

$$\int_{v_1}^{v_2} dv_x = \int_0^{t_1} (\cos \beta - f \sin \beta) dt,$$

bude

$$v_2 = g(\cos \beta - f \sin \beta)t + v_1.$$

V tomto vzťahu však ešte nie je známy čas  $t$  pohybu hmotného bodu z miesta 1 do miesta 2, preto využijeme ďalšiu možnosť dopísania potrebného počtu rovníc na základe známych hodnôt kinematiky pohybu. Napr. v čase  $t_1$  je bod v mieste 2, teda prejde známu dráhu  $l$ , takže potom

$$v_2 = \frac{dx}{dt} = g(\cos \beta - f \sin \beta) t_1 + v_1 ,$$

separáciou premenných a integráciou dostaneme

$$\int_0^l dx = \int_0^{t_1} [g(\cos \beta - f \sin \beta)] dt ,$$

odkiaľ

$$l = g(\cos \beta - f \sin \beta) \frac{t_1^2}{2} + v_1 t_1 .$$

Keďže v tejto rovnici je neznámou čas  $t_1$ , ide o kvadratickú rovnicu, ktorej korene sú

$$t_{1(*,**)} = \frac{-\frac{2v_1}{g(\cos \beta - f \sin \beta)} \pm \sqrt{\left(\frac{2v_1}{g(\cos \beta - f \sin \beta)}\right)^2 - 4 \frac{2l}{g(\cos \beta - f \sin \beta)}}}{2} .$$

Potom rýchlosť, ktorú hmotný bod dosiahne v mieste 2 je

$$v_2 = g(\cos \beta - f \sin \beta) t_1 + v_1 .$$

Pri riešení pohybu na úseku 1-2 bolo potrebné k dvom DPR dopísať ďalšie dve podmienky (rovnice), pretože v rovniciach sa vyskytovali štyri neznáme veličiny ( $a_x, F_t, F_n$ , čas  $t_1$ ). Jednu podmienku sme napísali z využitia znalostí o pasívnych odporoch (Coulombov vzťah) a druhú podmienku sme napísali s využitím daných (známych) kinematických veličín (dráha  $l$  v čase  $t_1$ ).

## b) Úsek 2-3

### 1. Uvoľnenie

Na bremeno pôsobí len sila vlastnej tiaže (odpor vzduchu zanedbáme). Je to priamková silová sústava, takže ide o pohyb hmotného bodu, ktorý sa v rovine  $xy$  pohybuje krivočiarno, zrýchlene. Súradnicovú sústavu  $x, y$  na tomto úseku volíme odlišnú od súradnicovej sústavy na úseku 1-2, pričom kladná orientácia osi  $y$  je totožná s orientáciou gravitačného zrýchlenia.

Hmotný bod má pri dopade v mieste 3 výslednú rýchlosť  $v_3$ , ktorá má smer dotýčnice k trajektórii. Vektor tejto rýchlosti môžeme rozložiť na zložky  $v_{3x}$  a  $v_{3y}$  v smere osí  $x, y$ .



## 2. DPR

Pre hmotný bod, ktorý má v rovine dva stupne voľnosti, vieme napísať dve lineárne nezávislé dynamické pohybové rovnice, v smeroch osí  $x, y$  s využitím napr. Newtonovho zákona sily

$$x \dots ma_x = \sum F_{ix}, \quad y \dots ma_y = \sum F_{iy},$$

po dosadení a úprave

$$\begin{aligned} x \dots ma_x &= 0, & y \dots ma_y &= G, \\ a_x &= 0, & a_y &= g. \end{aligned}$$

Aby sme sa dostali k zložkám rýchlostí  $v_{3x}, v_{3y}$ , potrebujeme riešiť tieto diferenciálne rovnice. Pri riešení využitím neurčitého integrálu dostávame

$$\begin{aligned} a_x &= 0, & a_y &= g, \\ \ddot{x} &= 0, & \ddot{y} &= g, \\ \dot{x} &= C_1, & \dot{y} &= gt + C_2. \end{aligned}$$

Integračné konštanty určíme zo začiatočných podmienok nasledovne:

$$\begin{aligned} \text{ak } t &= 0, \text{ potom } v_x = \dot{x} = v_2 \cos \beta, \text{ odkiaľ } C_1 = v_2 \cos \beta, \\ t &= 0, \text{ potom } v_y = \dot{y} = v_2 \sin \beta, \text{ odkiaľ } C_2 = v_2 \sin \beta. \end{aligned}$$

Potom zložky a rýchlosti v smeroch osí  $x, y$  sú

$$v_x = v_2 \cos \beta, \quad v_y = gt + v_2 \sin \beta.$$

Opäť nám tu vystupuje aj tretia neznáma, t. j. čas  $t$  pri pohybe hmotného bodu z miesta 2 do miesta 3. Využijeme známu dráhu v smere osi  $y$  (výšku) t. j.

$$h_1 = h - l \cos \beta.$$

Po ďalšej integrácii rovnice

$$\begin{aligned} v_y &= gt + v_2 \sin \beta, \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = gt + v_2 \sin \beta, \\ \int_0^{h_1} dy &= \int_0^{t_2} (gt + v_2 \sin \beta) dt, \end{aligned}$$

dostávame

$$h_1 = h - l \cos \beta = g \frac{t_2^2}{2} + v_2 t_2 \sin \beta$$

a z tejto kvadratickej rovnice vypočítame čas  $t_2$ .

Potom je možné určiť výslednú rýchlosť dopadu hmotného bodu v mieste 3:

$$v_3 = \sqrt{v_{3x}^2 + v_{3y}^2}.$$

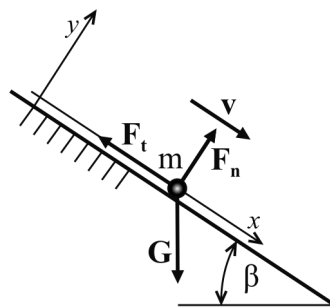
Kombináciou rôznych zoskupení súborov známych vstupných hodnôt je možné riešiť aj iné úlohy napr. za aký čas prejde hmotný bod z miesta 1 do 2 resp. z 2 do 3, v akej vzdialenosti na podložku dopadne a pod.

### **Príklad 2.27**

Dole drsnou naklonenou rovinou spustíme bremeno (považujeme ho za hmotný bod) začiatkovou rýchlosťou  $v_0$ . Vypočítajte, za aký čas prejde dráhu  $x_1$ .

Dané hodnoty:  $v_0 = 0 \text{ ms}^{-1}$ ,  $\beta = 20^\circ$ ,  $f = 0,1$ .

a) riešenie s využitím Newtonovho zákona sily



Obr.2.19

#### 1. Uvoľnenie

Na bremeno pôsobí sila jeho vlastnej tiaže  $G$ , zložky šmykového odporu naklonenej roviny  $F_t, F_n$ , čo predstavuje centrálnu rovinnú silovú sústavu. Pohybovať sa teda bude hmotný bod a to v rovine  $xy$ , priamočiario, pričom budeme predpokladať, že pôjde o pohyb zrýchlený.

#### 2. DPR

Pre hmotný bod v rovine vieme napísať dve lineárne nezávislé dynamické pohybové rovnice, v smeroch osí  $x, y$

$$m \dots m a_x = \sum F_{ix}, \quad y \dots m a_y = \sum F_{iy},$$

po dosadení

$$m \ddot{x} = G \sin \beta - F_t, \quad m \cdot 0 = F_n - G \cos \beta.$$

V týchto dvoch rovniciach sú tri neznáme  $(F_t, F_n, \ddot{x})$ , preto hľadáme ďalší vzťah (rovnice) napr. Coulombov vzťah  $F_t = f F_n$ . Po jeho dosadení do DPR dostávame

$$m\ddot{x} = G(\sin \beta - f \cos \beta),$$

$$\ddot{x} = g(\sin \beta - f \cos \beta).$$

Aby sme sa dostali až k dráhe, potrebujeme riešiť diferenciálnu rovnicu (napr. s využitím neurčitého integrálu):

$$\ddot{x} = g(\sin \beta - f \cos \beta),$$

$$\dot{x} = g(\sin \beta - f \cos \beta)t + C_1,$$

$$x = g(\sin \beta - f \cos \beta)\frac{t^2}{2} + C_1t + C_2.$$

Na určenie integračných konštánt  $C_1, C_2$  a neznámeho času  $t$  (tri neznáme) potrebujeme aspoň tri začiatočné podmienky:

$$\begin{array}{ll} \text{ak} & t = 0, \quad \text{potom} \quad \ddot{x} = 0, \\ & t = 0, \quad \dot{x} = 0, \\ & t = t_1, \quad x = x_1. \end{array}$$

Pre tieto začiatočné podmienky dostávame

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad t_1 = \sqrt{\frac{2x_1}{g(\sin \beta - f \cos \beta)}}.$$

## b) Riešenie s využitím vety o zmene hybnosti

### 1. Uvoľnenie

Pri uvoľňovaní postupujeme rovnako ako v predchádzajúcom riešení (obr.2.19).

### 2. DPR

Keďže ide o hmotný bod v rovine, vieme napísať dve dynamické pohybové rovnice, tentoraz s využitím vety o zmene hybnosti:

$$x \dots mv_x - mv_{0x} = \int_0^{t_1} (\sum F_{ix}) dt, \quad y \dots mv_y - mv_{0y} = \int_0^{t_1} (\sum F_{iy}) dt.$$

Hmotný bod sa pohybuje len v smere osi  $x$ , čo znamená, že  $v_y = v_{0y} = 0$ , potom

$$0 = \int_0^{t_1} (\sum F_{iy}) dt,$$

$$0 = (F_n - G \cos \beta)t_1.$$

Keďže  $t_1 \neq 0$ , potom musí platiť

$$0 = F_n - G \cos \beta,$$

čo predstavuje statickú podmienku rovnováhy.

Keďže v smere osi  $x$  je  $v_{0x} = 0$ , potom DPR bude

$$mv_x - 0 = (G \sin \beta - F_t) t_1,$$

čo predstavuje rovnicu s dvomi neznámymi  $(F_t, t_1)$ .

Po dosadení Coulombovho vzťahu  $F_t = f F_n$  do DPR dostávame

$$mv_x = (G \sin \beta - f G \cos \beta) t_1,$$

odkiaľ

$$t_1 = \sqrt{\frac{2x_1}{g(\sin \beta - f \cos \beta)}}.$$

### **Príklad 2.28**

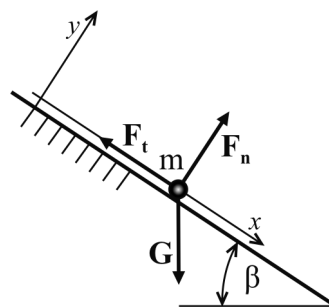
Po drsnej naklonenej rovine spúšťame bremeno, ktoré môžeme považovať za hmotný bod, začiatočnou rýchlosťou  $v_0$ . Akú bude mať bremeno rýchlosť po prejdení dráhy  $x_1$ ?

Dané hodnoty  $\beta = 40^\circ$ ,  $v_0 = 0 \text{ ms}^{-1}$ ,  $x_1 = 5 \text{ m}$ ,  $f = 0,3$

#### **a) Riešenie s využitím Newtonovho zákona sily**

##### **1. Uvoľnenie**

Na bremeno pôsobí sila jeho vlastnej tiaže  $G$ , zložky šmykového odporu  $F_t, F_n$ , ktoré tvoria centrálnu rovinnú silovú sústavu, takže hmotný bod sa pohybuje priamočiaro v rovine  $xy$  v smere osi  $x$ , pričom predpokladáme zrýchlený pohyb.



Obr.2.20

##### **2. DPR**

Pre dva stupne voľnosti hmotného bodu v rovine vieme napísať dve dynamické pohybové rovnice v smeroch osí  $x, y$

$$x \dots m\ddot{x} = \sum F_{ix}, \quad y \dots m\ddot{y} = \sum F_{iy},$$

keďže  $\ddot{y} = 0$ , potom po dosadení a úprave

$$m\ddot{x} = G \sin \beta - F_t, \quad 0 = F_n - G \cos \beta.$$

V týchto dvoch rovniciach sú tri neznáme ( $F_t, F_n, \ddot{x}$ ), takže musíme použiť Coulombov vzťah  $F_t = f F_n$ , potom

$$m\ddot{x} = G(\sin \beta - f \cos \beta),$$

$$\ddot{x} = g(\sin \beta - f \cos \beta).$$

Riešime diferenciálnu rovnicu (s využitím neurčitého integrálu)

$$\ddot{x} = g(\sin \beta - f \cos \beta),$$

$$\dot{x} = g(\sin \beta - f \cos \beta)t + C_1,$$

$$x = g(\sin \beta - f \cos \beta)\frac{t^2}{2} + C_1t + C_2.$$

Na určenie integračných konštánt  $C_1, C_2$  a neznámeho času  $t_1$  potrebujeme aspoň tri začiatočné podmienky:

$$\begin{array}{ll} \text{ak} & t = 0, \quad \text{potom} \quad \ddot{x} = 0, \\ & t = 0, \quad \dot{x} = 0, \\ & t = t_1, \quad x = x_1. \end{array}$$

Pre tieto začiatočné podmienky dostávame

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad x_1 = g(\sin \beta - f \cos \beta)\frac{t_1^2}{2},$$

odkiaľ

$$v = \sqrt{2x_1 g(\sin \beta - f \cos \beta)} = 6,36 \text{ ms}^{-1}.$$

#### b) Riešenie s využitím vety o zmene kinetickej energie

##### 1. Uvoľnenie

Pri uvoľňovaní postupujeme rovnako ako v predchádzajúcom riešení (obr.2.20).

##### 2. DPR

Pre hmotný bod, ktorý má v rovine dva stupne voľnosti, môžeme napísať najviac dve lineárne nezávislé dynamické pohybové rovnice v smeroch osí  $x, y$ . Ak použijeme vetu o zmene kinetickej energie

$$E_k - E_{k0} = A,$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \int_s F_t ds,$$

potom DPR v smeroch osí  $x, y$  budú

$$x \dots \frac{1}{2}mv_x^2 - \frac{1}{2}mv_{0x}^2 = \int_s F_{ix} dx,$$

$$y \dots \frac{1}{2}mv_y^2 - \frac{1}{2}mv_{y0}^2 = \int_s F_{iy} dy.$$

Ak si uvedomíme, že v smere osi  $y$  sa pohyb nekoná, potom  $dy = 0$ ,  $v_y = v_{y0} = 0$ , a teda veta o zmene kinetickej energie nie je použiteľná pre napísanie DPR v smere osi  $y$ .

V smere osi  $x$  bude

$$x \dots \frac{1}{2}mv_x^2 - \frac{1}{2}mv_{0x}^2 = (G \sin \beta - F_t) x_1$$

V smere osi  $y$  napíšeme DPR s využitím Newtonovho zákona sily:

$$y \dots ma_y = \sum F_{iy},$$

pričom ak  $a_y = 0$ , potom

$$0 = F_n - \cos \beta$$

je vlastne statická podmienka rovnováhy.

Po úprave a dosadení Coulombovho vzťahu  $F_t = f F_n$  bude

$$\frac{1}{2}mv^2 = G(\sin \beta - f \cos \beta)x_1,$$

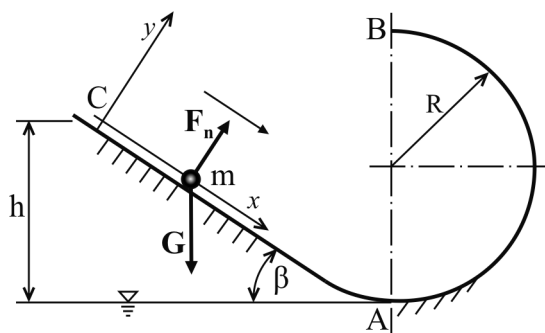
odkiaľ

$$v = \sqrt{2x_1 g (\sin \beta - f \cos \beta)} = 6,36 \text{ ms}^{-1}.$$

### **Príklad 2.29**

Bremeno, ktoré môžeme považovať za hmotný bod, sa s nulovou začiatočnou rýchlosťou pohybuje po šikmej hladkej ploche tak, že v bode  $A$  prejde na hladkú kruhovú dráhu. Vypočítajte, z akej výšky  $h$  ho musíme spustiť, aby sa dostal až do bodu  $B$  rýchlosťou  $v_B$ .

Dané hodnoty:  $v_B$ ,  $R$ .



Obr.2.21

a) Riešenie s využitím zákona o zachovaní mechanickej energie

1. Uvoľnenie

Na bremeno pôsobí sila jeho vlastnej tiaže  $G$  a normálová zložka reakcie naklonenej roviny  $F_n$ . Hmotný bod sa pohybuje v rovine  $xy$ , priamočiarno v smere osi  $x$ , zrýchlene.

2. DPR

Využijeme vetu o zachovaní mechanickej energie. Za hladinu nulového potenciálu zvolíme horizontálnu linku na úrovni bodu  $A$  (znak  $\Sigma$ ). K tejto hladine budeme vzťahovať vzdialenosti (výšky) pre určenie potenciálnej energie.

Veta o zachovaní mechanickej energie sa dá zapísať v tvare

$$E_{K1} + E_{P1} = E_{K2} + E_{P2},$$

kde  $E_K, E_P$  sú kinetická a potenciálna energia hmotného bodu v miestach (časových okamihoch) „1“ a „2“, t.j. v bodoch  $C$  a  $B$ .

Potom DPR bude

$$\frac{1}{2}mv_C^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg2R,$$

odkiaľ pre  $v_C = 0$  dostávame

$$h = 2R + \frac{v_B^2}{2g}.$$

Podmienkou aby hmotný bod „nespadol“ vplyvom vlastnej tiaže z kruhovej dráhy ešte pred dosiahnutím bodu  $B$  je, aby odstredivá sila v mieste  $B$  (pri pohybe po kruhovej dráhe) bola prinajmenšom rovná vlastnej tiaži, teda

$$F_o \geq G,$$

$$ma_n \geq mg,$$

$$m \frac{v_B^2}{R} \geq G \quad \Rightarrow \quad v_B^2 \geq gR,$$

potom minimálna výška  $h$ , z ktorej musíme spustiť bremeno, aby dosiahlo bod  $B$  a nespadlo pritom od dráhy, bude

$$h \geq 2R + \frac{v_B^2}{2g} \quad \Rightarrow \quad h \geq \frac{5}{2}R.$$

b) Riešenie s využitím vety o zmene kinetickej energie

1. Uvoľnenie

Pri uvoľňovaní postupujeme rovnako ako v predchádzajúcom riešení (obr.2.21).

## 2. DPR

Veta o zmene kinetickej energie pri pohybe hmotného bodu medzi miestami  $C$  a  $B$  sa dá napísať v tvare

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_C^2 = \sum A_i,$$

kde rýchlosť  $v_C = 0 \text{ ms}^{-1}$ .

Práca sily  $G$  pri jeho pohybe od bodu  $C$  do bodu  $A$  bude daná vzťahom

$$A_1 = Gh,$$

a pri pohybe z bodu  $A$  do bodu  $B$

$$A_2 = G2R.$$

Normálová zložka  $F_n$  reakcie podložky je kolmá na dráhu pohybu, takže prácu nevykonáva.

Potom celková práca síl pôsobiacich na hmotný bod bude daná súčtom

$$\sum A_i = Gh - G2R = G(h - 2R).$$

Po dosadení do vety o zmene kinetickej energie dostávame

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = G(h - 2R),$$

odkiaľ

$$h = 2R + \frac{v_B^2}{2g}.$$

Ďalší postup je rovnaký ako v predchádzajúcom riešení tohto príkladu.

### c) Riešenie s využitím Newtonovho zákona sily a vety o zachovaní mechanickej energie

Riešenie rozdelíme na riešenie pohybu hmotného bodu na dvoch úsekoch. Na pohyb z bodu  $C$  do bodu  $A$  a pohyb z bodu  $A$  do bodu  $B$ .

Úsek  $C - A$ :

1. Uvoľnenie: pozri obr. 2.21

2. DPR: S využitím Newtonovho zákona sily, v smere osí  $x, y$

$$x \dots ma_x = \sum F_{ix}, \quad y \dots ma_y = \sum F_{iy}.$$

Ak  $a_y = 0$ , potom

$$\frac{G}{g}a_x = G \sin \beta, \quad (1)$$



$$0 = N - G \cos \beta, \quad (2)$$

Poznámka: Číslovanie rovníc platí len pre tento príklad.

V týchto dvoch rovniciach sú dve neznáme  $a_x, N$ .

Aby sme sa prepracovali až k výpočtu výšky  $h$ , musíme najprv riešiť diferenciálnu rovnicu (1), z ktorej určíme rýchlosť bodu v mieste  $A$ . S využitím neurčitého integrálu:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= g \sin \beta, \\ \dot{x} &= gt \sin \beta + C_1, \\ x &= g \frac{t^2}{2} \sin \beta + C_1 t + C_2. \end{aligned}$$

Sformulujme začiatočné podmienky:

$$\text{ak } t = 0, \quad \text{potom } x = 0, \quad (3)$$

$$t = 0, \quad \dot{x} = v_B = 0, \quad (4)$$

$$t = t_A, \quad x = x_A. \quad (5)$$

Z rovníc (3), (4), (5) určíme integračné konštanty

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad x_1 = g \frac{t_A^2}{2} \sin \beta,$$

odkiaľ

$$t_A = \sqrt{\frac{2x_1}{g \sin \beta}}.$$

Potom rýchlosť hmotného bodu v mieste  $A$  bude

$$v_A = \dot{x} = gt_A \sin \beta + C_1 = gt_A \sin \beta = g \sin \beta \sqrt{\frac{2x_1}{g \sin \beta}} = \sqrt{2x_1 g \sin \beta},$$

odkiaľ po dosadení za  $\sin \beta = \frac{h}{x_1}$  (pozri obr.2.21) dostávame

$$v_A = \sqrt{2gh}.$$

Úsek  $A - B$ :

1. Uvoľnenie: pozri obr. 2.21

2. DPR

Využijeme vetu o zachovaní mechanickej energie pri pohybe medzi bodmi  $A$  a  $B$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mg \cdot 0 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mg2R,$$

odkiaľ

$$v_A^2 = v_B^2 + 4gR. \quad (6)$$

Ak vychádzame z úvahy, že hmotný bod sa vplyvom vlastnej tiaže nesmie odpútať od dráhy ešte pred dosiahnutím miesta  $B$ , potom musí byť splnená podmienka, ktorú sme odvodili v riešení a) tohto príkladu:

$$v_B^2 \geq gR.$$

Po dosadení do rovnice (6) dostávame

$$2gh \geq gR + 4gR,$$

odkiaľ

$$h \geq \frac{5}{2}R.$$

### **Príklad 2.30**

Bremeno o hmotnosti  $m$  sa pohybuje dole hladkou naklonenou rovinou ( $\beta = 25^\circ$ ). Vypočítajte jeho zrýchlenie.

$$(4,15 \text{ ms}^{-2})$$

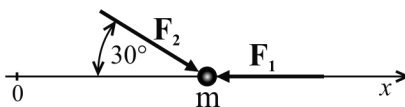
### **Príklad 2.31**

Bremeno sa pohybuje dole drsnou naklonenou rovinou ( $f = 0,3$ ;  $\beta = 40^\circ$ ). Určte jeho zrýchlenie.

$$(4,05 \text{ ms}^{-2})$$

### **Príklad 2.32**

Hmotný bod o hmotnosti  $m = 5 \text{ kg}$  sa pohybuje pod vplyvom síl  $F_1 = 3 \text{ N}$ ,  $F_2 = 10 \text{ N}$ . Vypočítajte zložku zrýchlenia v smere osi  $x$ .



Obr. 2.22

$$(1,13 \text{ ms}^{-2})$$

### **Príklad 2.33**

Hmotný bod o hmotnosti  $m = 9 \text{ kg}$  sa pohybuje v priestore za pôsobenia sily  $\mathbf{F} = 5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$ . Vypočítajte jeho výsledné zrýchlenie.

$$(1,17 \text{ ms}^{-2})$$

**Príklad 2.34**

Čln o hmotnosti  $m = 200 \text{ kg}$  po zastavení motora sa pohybuje priamočiarno, pričom na neho pôsobí sila odporu vody  $F_R = 4v^2$ . Vypočítajte zrýchlenie (spomalenie) člna v momente, keď má rýchlosť  $v = 5 \text{ ms}^{-2}$ .

$$(-0,5 \text{ ms}^{-2})$$

**Príklad 2.35**

Bremeno o hmotnosti  $m = 20 \text{ kg}$  padá k Zemi, odpor vzduchu je  $F_R = 0,04v^2$ . Vypočítajte maximálnu rýchlosť pádu bremena.

$$(70 \text{ ms}^{-2})$$

**Príklad 2.36**

Bremeno o hmotnosti  $m = 1 \text{ kg}$  sa začne pohybovať z pokoja dole drsnou naklonenou rovinou pod vplyvom vlastnej tiaže. Vypočítajte najväčšiu rýchlosť bremena, ak odpor proti pohybu je úmerný sile  $F_R = 0,08v$ .

$$(41,9 \text{ ms}^{-1})$$

**Príklad 2.37**

Hmotný bod sa pohybuje po hladkej naklonenej rovine z pokoja pod vplyvom vlastnej tiaže. Vypočítajte, za aký čas prejde dráhu  $30 \text{ m}$ .

$$(5,93 \text{ s})$$

**Príklad 2.38**

Bremeno o hmotnosti  $m = 200 \text{ kg}$  sa začne pohybovať z pokoja hore hladkou naklonenou rovinou pod vplyvom sily  $F = 1 \text{ kN}$ , ktorá je rovnobežná s naklonenou rovinou. Vypočítajte čas, za ktorý bremeno prejde dráhu  $8 \text{ m}$ .

$$(4,33 \text{ s})$$

**Príklad 2.39**

Hmotný bod o hmotnosti  $m = 900 \text{ kg}$  sa pohybuje po hladkej vodorovnej podložke priamočiarno pod vplyvom sily  $F = 270t$ . Vypočítajte rýchlosť bodu v čase  $t_1 = 10 \text{ s}$ , ak pri  $t_0 = 0$  je  $v_0 = 10 \text{ ms}^{-1}$ .

$$(25 \text{ ms}^{-1})$$

**Príklad 2.40**

Hmotný bod o hmotnosti  $m = 25 \text{ kg}$  sa pohybuje priamočiarno, vodorovne po hladkej podložke pod vplyvom sily  $F = 20t$ . Vypočítajte jeho dráhu v čase  $t_1 = 4 \text{ s}$ .

(8,53 m)

**Príklad 2.41**

Bremeno o hmotnosti  $m = 1 \text{ kg}$  padá pod vplyvom vlastnej tiaže, odpor vzduchu je určený silou  $R = 0,03v$ . Aká je najväčšia rýchlosť pádu?

(327  $\text{ms}^{-1}$ )

**Príklad 2.42**

Hmotný bod o hmotnosti  $m = 2 \text{ kg}$  sa pohybuje v smere osi  $x$  po hladkej vodorovnej rovine pod vplyvom sily  $F_x = 5 \cos(0,5t)$ . Vypočítajte jeho rýchlosť v čase  $t_1 = 4 \text{ s}$ , ak pri  $t_0 = 0 \text{ s}$  je  $v_0 = 0 \text{ ms}^{-1}$ .

(4,55  $\text{ms}^{-1}$ )

**Príklad 2.43**

Hmotný bod o hmotnosti  $m = 20 \text{ kg}$  sa pohybuje priamočiarno v smere osi  $x$  po vodorovnej podložke, pričom na neho pôsobí odporová sila  $R = 0,2v^2$ . Za aký čas sa jeho rýchlosť zmení z  $10 \text{ ms}^{-1}$  na  $5 \text{ ms}^{-1}$ ?

(10 s)

**Príklad 2.44**

Hmotný bod sa pohybuje po hladkej vodorovnej podložke pod vplyvom sily  $\mathbf{F} = 9\mathbf{t} + 8\mathbf{n}$ . Určte jeho hmotnosť, ak jeho zrýchlenie je  $a = 0,5 \text{ ms}^{-2}$ .

(24,08 kg)

**Príklad 2.45**

Hmotný bod o hmotnosti  $m = 2 \text{ kg}$  sa pohybuje po hladkej vodorovnej podložke pod vplyvom sily  $\mathbf{F} = 3\mathbf{t} + 4\mathbf{n}$ . Vypočítajte jeho výsledné zrýchlenie.

(2,5  $\text{ms}^{-2}$ )

### **Príklad 2.46**

Vypočítajte čas a vzdialenosť, na ktorej zastaví vagón brzdený silou o veľkosti 0,3 násobku jeho tiaže. Na začiatku má rýchlosť  $10 \text{ ms}^{-1}$ .

$$(t = 3,4 \text{ s}, x = 17 \text{ m})$$

### **Príklad 2.47**

Hmotný bod sa pohybuje dole drsnou naklonenou rovinou ( $\beta = 30^\circ$ ,  $f = 0,1$ ) so začiatočnou rýchlosťou  $v_1 = 15 \text{ ms}^{-1}$  pod vplyvom vlastnej tiaže. Za aký čas sa zastaví a akú dráhu pri tom prejde?

$$(t_1 = 2,61 \text{ s}, x = 19,57 \text{ m})$$

## **2.7 Relatívny pohyb hmotného bodu**

Ak vyšetrujeme pohyb hmotného bodu vo vzťahu k inému sa pohybujúcemu objektu, potom hovoríme, že hmotný bod vykonáva relatívny pohyb.

Dynamická pohybová rovnica hmotného bodu vo vektorovom tvare je

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_u + \mathbf{F}_c,$$

kde  $\mathbf{a}_r$  je zrýchlenie relatívneho pohybu hmotného bodu,

$\mathbf{F}_r$  výsledná vonkajšia sila pôsobiaca na hmotný bod,

$\mathbf{F}_u = -m\mathbf{a}_u$  zotrvačná sila unášavého pohybu hmotného bodu,

$\mathbf{F}_c = -m\mathbf{a}_c$  Coriolisova zotrvačná sila,

$\mathbf{a}_u$  zrýchlenie unášavého pohybu hmotného bodu,

$\mathbf{a}_c$  Coriolisové zrýchlenie.

Po rozpísaní vektorovej dynamickej pohybovej rovnice dostaneme sústavu dynamických pohybových rovníc (zložkových) v smeroch osí súradnicového systému.

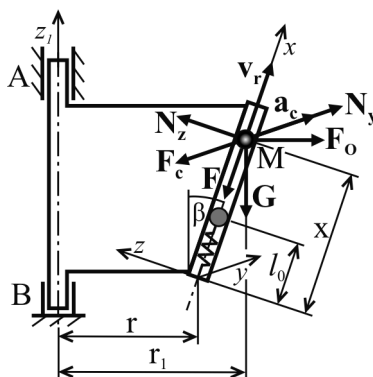
### **2.7.1 Príklady (Relatívny pohyb hmotného bodu)**

#### **Príklad 2.48**

Tuhá plochá doska sa otáča okolo osi  $z_1$  uhlovou rýchlosťou  $\omega$ . Po jej hrane sa vo vedení pohybuje guľôčka  $M$  o hmotnosti  $m$  uchytená v spodnej časti pružinou o tuhosti

$k$ . Určte rovnicu trajektórie relatívneho pohybu guľôčky  $M$ , jeho polohu a rýchlosť v čase  $t_1$ . Pasívne odpory zanedbajte.

Dané hodnoty:  $m = 0,01\text{kg}$ ,  $\omega = \pi \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $t_1 = 0,2\text{s}$ ,  $x_0 = 0,3\text{m}$ ,  $\dot{x}_0 = 2\text{ms}^{-1}$ ,  $k = 1\text{Nm}^{-1}$ ,  $l_0 = 0,2\text{m}$ ,  $r = 0,2\text{m}$ .



Obr. 2.23

### 1. Uvoľnenie

Vo všeobecnom časovom okamihu (v polohe  $x$ ) na guľôčku  $M$  pôsobí sila jej tiaže  $G$ , odstredivá sila  $F_o$ , Coriolisova sila  $F_c$ , zložky reakcií vedenia  $N_y$ ,  $N_z$  a sila v pružine  $F$ . Zvolíme súradnicový systém  $x, y, z$ . Guľôčka sa pohybuje v smere vedenia, teda v smere osi  $x$  (relatívny pohyb), doska sa otáča okolo osi  $z_1$  (unášavý pohyb), guľôčka sa pohybuje voči nepohyblivému základu (výsledný pohyb).

### 2. Dynamické pohybové rovnice (DPR)

Ak unášavý pohyb (rotácia okolo stálej osi rotácie  $z_1$ ) je rovnomerný ( $\omega = \text{konšt.}$ ), potom DPR relatívneho pohybu guľôčky (hmotného bodu) je

$$x \dots m a_x = \sum (F_{ix} + F_c + F_o),$$

kde  $F_o$  je odstredivá sila,

$F_c$  je Coriolisova sila,

$F_{ix}$  sú zložky ďalších vonkajších síl (reakcia vedenia, tiaž  $G$ ) v smere osi  $x$ .

Pre odstredivú a Coriolisovu silu platí

$$F_o = m a_o = m \omega^2 r_1 = m \omega^2 (r + x \sin \beta),$$

$$F_c = m a_c = m 2 \omega v_r \sin \beta = 2 m \omega \dot{x}_0 \sin \beta.$$

Potom DPR v smere osi  $x$  bude

$$m\ddot{x} = -G \cos \beta - F + F_o \sin \beta,$$

kde  $F = k(x - l_0)$  je sila v natiahnutej pružine, potom

$$m\ddot{x} = -G \cos \beta - k(x - l_0) + m\omega^2(r + x \sin \beta) \sin \beta.$$

Po úprave dostaneme

$$\ddot{x} + \left( \frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2 \beta \right) x = \omega^2 r \sin \beta - g \cos \beta + \frac{kl_0}{m}. \quad (1)$$

Riešenie rovnice (1) predpokladáme v tvare  $x = x_1 + x_2$ ,

kde  $x_1$  je všeobecné riešenie odpovedajúcej homogénnej rovnice,

$x_2$  je partikulárne riešenie.

Charakteristická rovnica homogénnej diferenciálnej rovnice je

$$\lambda^2 + \left( \frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2 \beta \right) = 0$$

a jej korene

$$\lambda_{1,2} = \sqrt{\omega^2 \sin^2 \beta - \frac{k}{m}} = \pm 9,875i, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Všeobecné riešenie homogénnej rovnice je v tvare

$$x_1 = e^{at} [C_1 \cos(\beta t) + C_2 \sin(\beta t)] = C e^{at} \sin(\beta t + \varphi),$$

kde  $\lambda_{1,2} = a \pm ib$ ,

teda

$$\begin{aligned} x_1 &= e^0 [C_1 \cos(9,875t) + C_2 \sin(9,875t)] \\ x_1 &= C_1 \cos(9,875t) + C_2 \sin(9,875t). \end{aligned}$$

Partikulárne riešenie je

$$x_2 = B = \frac{\omega^2 r \sin \beta - g \cos \beta + \frac{kl_0}{m}}{\frac{k}{m} - \omega^2 \sin^2 \beta} = 0,128 \text{ m}.$$

Potom výsledné riešenie diferenciálnej rovnice (1) je

$$x = C_1 \cos(9,875t) + C_2 \sin(9,875t) + 0,128. \quad (2)$$

Jeho deriváciou podľa času  $t$  dostávame

$$\dot{x} = -9,875C_1 \sin(9,875t) + 9,875C_2 \cos(9,875t) \quad (3)$$

Integračné konštanty určíme z nasledovných začiatočných podmienok:

$$\text{ak } t = 0 \quad \text{potom } x_0 = 0,3\text{m}, \quad \dot{x}_0 = 2\text{ms}^{-1}.$$

Po ich dosadení za  $t = 0$  do rovníc (2) a (3) dostávame

$$x_0 = C_1 + 0,125$$

$$\dot{x}_0 = 9,875C_2,$$

odkiaľ

$$C_1 = 0,172,$$

$$C_2 = 0,202.$$

Potom rovnica trajektórie relatívneho pohybu (parametrická rovnica pohybu guľôčky v smere osi  $x$ ) bude

$$x = 0,172\cos(9,875t) + 0,202\sin(9,875t) + 0,128,$$

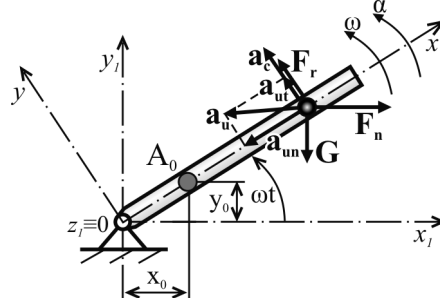
a rovnica rýchlosti

$$\dot{x} = -1,69\sin(9,875t) + 1,99\cos(9,875t).$$

V čase  $t_1 = 0,2\text{ s}$  je  $x$ -ová súradnica guľôčky  $x = 0,246\text{m}$  a rýchlosť  $\dot{x} = 2,33\text{ms}^{-1}$ .

### **Príklad 2.49**

Rúrka sa otáča uhlovou rýchlosťou  $\omega$  a uhlovým zrýchlením  $\alpha$  okolo osi  $z_1$  v rovine  $x_1y_1$ . V nej sa pohybuje bremeno o hmotnosti  $m$ , ktoré sa na začiatku časového intervalu nachádza v bode  $A(x_0, y_0)$ . Určte rovnicu trajektórie relatívneho pohybu bremena vzhľadom na rúrku. Pasívne odpory pri riešení zanedbajte.



**Obr. 2.24**

#### **1. Uvoľnenie**

Vo všeobecnom časovom okamihu pôsobí na bremeno sila jeho tiaže  $G$ , reakcia rúrky  $F_r$ , unášavá sila  $F_u$  a Coriolisova sila  $F_c$ . Rúrka vykonáva rotačný pohyb okolo osi  $z_1$  uhlovou rýchlosťou  $\omega$  a uhlovým zrýchlením  $\alpha$  (unášavý pohyb). Súčasne sa vo vnútri



rúrky, t.j. v smere osi  $x$ , posúva bremeno (relatívny pohyb). Voči nepohyblivému okoliu bremeno koná výsledný pohyb. S rúrkou spojíme súradnicový systém  $Oxy$ .

## 2. Dynamická pohybová rovnica (DPR)

Vo vektorovom tvare je

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{G} + \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_u + \mathbf{F}_c,$$

kde  $\mathbf{G}$  je tiaž bremena,

$\mathbf{F}_r$  reakcia rúrky,

$\mathbf{F}_u = -m\mathbf{a}_u$  unášavá sila,

$\mathbf{F}_c = -m\mathbf{a}_c$  Coriolisova sila.

V zložkovom tvare bude DPR v smere osi  $x$

$$m\ddot{x} = -mg \sin(\omega t) + m\omega^2 x,$$

odkiaľ po úprave dostávame

$$\ddot{x} - \omega^2 x = g \sin(\omega t),$$

čo predstavuje homogénnu lineárnu diferenciálnu rovnicu druhého rádu. Jej riešenie je zložené zo všeobecného a partikulárneho riešenia v tvare

$$x = C_1 e^{\omega t} + C_2 e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t.$$

Pre začiatočné podmienky  $t = 0$ ,  $x = x_0$ ,  $\dot{x}_0 = 0$  budú integračné konštanty

$$C_1 = x_0 - \frac{2\omega^2 x_0 + g}{4\omega}, \quad C_2 = \frac{2\omega^2 x_0 + g}{4\omega}.$$

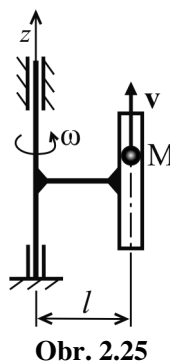
Potom rovnica dráhy (parametrická rovnica pohybu v smere osi  $x$ ) relatívneho pohybu bremena je

$$x = \left( x_0 - \frac{2\omega^2 x_0 + g}{4\omega} \right) e^{\omega t} + \frac{2\omega^2 x_0 + g}{4\omega} e^{-\omega t} + \frac{g}{2\omega^2} \sin \omega t.$$

### **Príklad 2.50**

Gulôčka  $M$  o hmotnosti  $m$  sa pohybuje rýchlosťou  $v$  vo vertikálnej rúrke, ktorá sa so závesom otáča uhlovou rýchlosťou  $\omega$  okolo osi  $z$ . Určte zotrvačnú silu pôsobiacu na gulôčku.

Dané hodnoty:  $m = 0,2\text{kg}$ ,  $v = 19,62\text{ms}^{-1}$ ,  $l = 0,5\text{m}$ ,  $\omega = 5\text{rad.s}^{-1}$



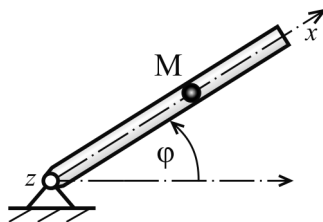
Obr. 2.25

(2,5 N)

### Príklad 2.51

Rúrka sa otáča okolo osi  $z$  kolmej na vodorovnú rovinu podľa parametrickej rovnice  $\varphi = \varphi(t)$ . V rúrke sa pohybuje guľôčka  $M$  o hmotnosti  $m$  v smere osi rúrky podľa parametrickej rovnice  $x = x(t)$ . Vypočítajte veľkosť Coriolisovej sily pôsobiacej na guľôčku v časovom okamihu  $t_1$ .

Dané hodnoty:  $\varphi = t^2$ ,  $m = 0,1\text{kg}$ ,  $x = 0,2t^3$ ,  $t_1 = 1\text{s}$ .



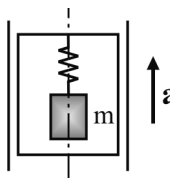
Obr. 2.26

(0,24 N)

### Príklad 2.52

Kabína výťahu o hmotnosti  $m$  sa pohybuje hore so zrýchlením  $a$ . Vypočítajte silu v pružine, na ktorej je zavesená.

Dané hodnoty:  $a = 0,5g$ ,  $G = 100\text{ N}$ .



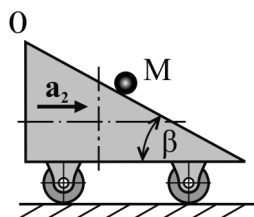
Obr. 2.27

(150 N)

**Príklad 2.53**

Gulôčka  $M$  o hmotnosti  $m_1$  sa z relatívneho pokoja bude pohybovať po hladkom povrchu klina, ktorý sa pohybuje priamočiarno vodorovne konštantným zrýchlením  $a_2$ . Určte rýchlosť guľôčky v čase  $t_1$ .

Dané hodnoty:  $a = 3,5\text{ms}^{-2}$ ,  $t_1 = 5\text{s}$ ,  $\beta = 20^\circ$ .



Obr. 2.28

$(0,331\text{ms}^{-1})$

### 3 DYNAMIKA SÚSTAV HMOTNÝCH BODOV (SHB)

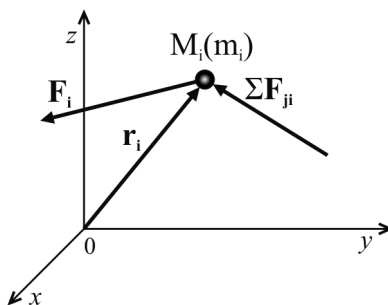
#### 3.1 Pohybové rovnice SHB

Sústava hmotných bodov (SHB) je množina bodov v priestore, ktorých poloha sa mení navzájom, aj vzhľadom na vzťahný priestor.

Na  $i$ -ty hmotný bod  $M_i$  sústavy s hmotnosťou  $m_i$ , ktorého poloha je určená polohovým vektorom  $\mathbf{r}_i$  vzhľadom na začiatok súradnicového systému  $0, x, y, z$ , pôsobia sily:

- vonkajšie  $\mathbf{F}_i$ , pôsobiace na sústavu zvonku,
- vnútorné  $\mathbf{F}_{ji}$ , ktorými pôsobia na seba body sústavy.

Ak  $j$ -ty hmotný bod pôsobí na  $i$ -ty hmotný bod silou  $\mathbf{F}_{ji}$  ( $j \neq i$ ), potom podľa zákona akcie a reakcie platí  $\mathbf{F}_{ji} = -\mathbf{F}_{ij}$  (obr.3.1).



Obr. 3.1

Sústava vnútorných síl je rovnovážna, teda platí, že celkový súčet vnútorných síl sa rovná nule. Potom podmienky rovnováhy vnútorných síl sú

$$\sum_i \sum_j \mathbf{F}_{ji} = \mathbf{0},$$

$$\sum_i \sum_j \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} = \mathbf{0}, \quad j \neq i.$$

Vzťahy

$$\sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i,$$

$$\sum_i \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_i \mathbf{M}_{i0} = \sum_i \mathbf{M}_0,$$

sú vektorové pohybové rovnice sústavy.

### 3.2 Vety o pohybe ťažiska SHB

Poloha ťažiska SHB je určená vzťahom

$$m\mathbf{r}_T = \sum_i m_i \mathbf{r}_i, \quad (3.1)$$

kde  $m$  je celková hmotnosť SHB,

$m_i$  sú hmotnosti jednotlivých bodov sústavy,

$\mathbf{r}_T$  je polohový vektor ťažiska sústavy,

$\mathbf{r}_i$  sú polohové vektory jednotlivých hmotných bodov sústavy.

Po derivácii vzťahu (3.1) podľa času bude

$$m\mathbf{v}_T = \sum_i m_i \mathbf{v}_i, \quad (3.2)$$

kde  $\mathbf{v}_T$  je rýchlosť ťažiska SHB,

$\mathbf{v}_i$  sú rýchlosti jednotlivých hmotných bodov SHB.

Rovnicu (3.2) nazývame tiež prvá veta o pohybe ťažiska SHB, ktorá hovorí, že hybnosť ťažiska SHB sa rovná súčtu hybností jednotlivých hmotných bodov sústavy.

Po derivácii vzťahu (3.2) podľa času bude

$$m\mathbf{a}_T = \sum_i m_i \mathbf{a}_i = \sum_i \mathbf{F}_i, \quad (3.3)$$

kde  $\mathbf{a}_T$  je zrýchlenie ťažiska SHB,

$\mathbf{a}_i$  sú zrýchlenia jednotlivých hmotných bodov SHB.

Rovnicu (3.3) nazývame druhá veta o pohybe ťažiska SHB, ktorá hovorí, že rovnovážny stav ťažiska SHB zmenia len vonkajšie sily pôsobiace na sústavu.

### 3.3 Hybnosť a moment hybnosti SHB

Hybnosť SHB je určená súčtom hybností jednotlivých hmotných bodov

$$\mathbf{H} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i.$$

Zmena hybnosti SHB za určitý časový interval je určená súčtom impulzov vonkajších síl v tom istom časovom intervale

$$\mathbf{H} - \mathbf{H}_0 = \mathbf{I}, \quad \text{alebo}$$

$$\sum_i m_i \mathbf{v}_i - \sum_i m_i \mathbf{v}_0 = \sum_i \int_{t_0}^t \mathbf{F}_i dt.$$

Moment hybnosti i-tého hmotného bodu k vzťažnému bodu (napr. začiatku súradnicového systému) 0 je

$$\mathbf{L}_{i0} = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i.$$

Zmena momentu hybnosti SHB k jej ťažisku sa rovná momentu vonkajších síl k ťažisku

$$\frac{d\mathbf{L}_T}{dt} = \mathbf{M}_T, \text{ resp. } \sum_i (\mathbf{r}_{iT} \times m_i \mathbf{a}_{iT}) = \sum_i (\mathbf{r}_{iT} \times \mathbf{F}_i).$$

### 3.4 Kinetická energia SHB

Kinetická energia SHB je určená súčtom kinetických energií jednotlivých bodov sústavy

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2.$$

Po úprave dostávame

$$E_K = \frac{1}{2} m v_T^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{iT}^2,$$

čo je vyjadrenie **Königovej vety**, ktorá hovorí, že kinetická energia SHB je určená súčtom kinetickej energie ťažiska a kinetickej energie SHB pri jej pohybe vzhľadom na jej ťažisko.

Ďalšou úpravou sa dá definovať **veta o zmene kinetickej energie SHB**, ktorá hovorí, že zmena veľkosti kinetickej energie SHB je určená okamžitým výkonom pracovných síl, t.j.

$$\frac{dE_K}{dt} = E_K - E_{K0} = A_P = \sum_i \int_{t_0}^{t_i} \mathbf{F}_{ip} \cdot \mathbf{v}_i = P_p.$$

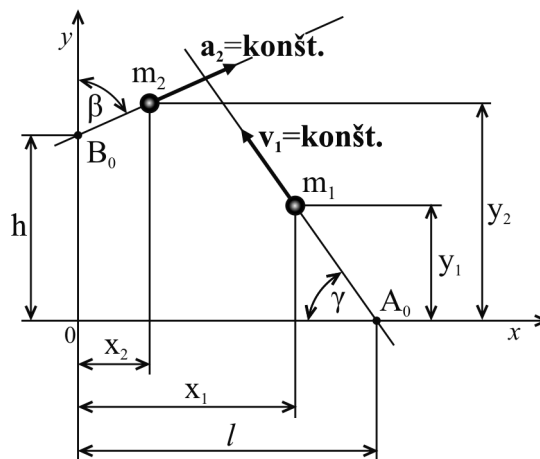
### 3.5 Príklady (SHB)

#### Príklad 3.1

Po vodorovnej hladkej (pasívne odpory zanedbávame) podložke sa pohybuje hmotný bod  $m_1$  stálou rýchlosťou  $v_1$ , hmotný bod  $m_2$  stálym zrýchlením  $a_2$ , pričom smery a orientácie ich pohybu sú určené. V čase  $t=0$  má bod  $m_1$  rýchlosť  $v_{10}$  a nachádza sa

v bode  $A_0$ , bod  $m_2$  má rýchlosť  $v_{20} = 0 \text{ ms}^{-1}$  a nachádza sa v bode  $B_0$ . Vypočítajte súradnice ťažiska SHB, jeho rýchlosť a zrýchlenie v čase  $t_1$ .

Dané hodnoty:  $m_1 = 2 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 3 \text{ kg}$ ,  $h = 1 \text{ m}$ ,  $l = 3 \text{ m}$ ,  $v_1 = 3 \text{ ms}^{-1}$ ,  $a_2 = 1 \text{ ms}^{-2}$ ,  $t_1 = 3 \text{ s}$ ,  
 $\beta = 60^\circ$ ,  $\gamma = 30^\circ$



Obr. 3.2

#### a) Riešenie derivovaním parametrických rovníc

##### 1. Uvoľnenie

Sily tiaže hmotných bodov a normálové zložky reakcie podložky sú kolmé na podložku a smery pohybov, nekreslíme ich. Pasívne odpory zanedbáme. Označíme súradnice jednotlivých hmotných bodov vo všeobecnom časovom okamihu, t.j.  $x_1, y_1, x_2, y_2$ . Ide o sústavu hmotných bodov (SHB), ktorá sa pohybuje v rovine  $xy$ .

##### 2. Určenie polohy (súradníc) ťažiska SHB

Z obr. 3.2 je zrejmé, že súradnice hmotných bodov sú:

$$\begin{aligned} x_1 &= l - v_1 t \cos \gamma, & y_1 &= v_1 t \sin \gamma, \\ x_2 &= \frac{a_2 t^2}{2} \sin \beta, & y_2 &= h + \frac{a_2 t^2}{2} \cos \beta, \end{aligned}$$

pretože hmotný bod  $m_1$  vykonáva priamočiary pohyb stálou rýchlosťou  $v_1$ , hmotný bod  $m_2$  priamočiary zrýchlený pohyb zrýchlením  $a_2$ .

Súradnice ťažiska sústavy určíme zo vzťahov

$$\begin{aligned} mx_T &= \sum_i m_i x_i, \\ my_T &= \sum_i m_i y_i, \end{aligned}$$

odkiaľ

$$x_T = \frac{\sum_i m_i x_i}{m} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 (l - v_1 t_1 \cos \gamma) + m_2 \left( \frac{a_2 t_1^2}{2} \sin \beta \right)}{m_1 + m_2} = 0,4205 \text{ m},$$

$$y_T = \frac{\sum_i m_i y_i}{m} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 v_1 t_1 \sin \gamma + m_2 \left( h + \frac{a_2 t_1^2}{2} \cos \beta \right)}{m_1 + m_2} = 3,75 \text{ m}.$$

### 3. Určenie rýchlosti ťažiska SHB

Deriváciou parametrických rovníc pohybu ťažiska SHB podľa času získame zložky rýchlosti ťažiska SHB v smeroch osí  $x, y$

$$v_{xT} = \dot{x}_T = \frac{dx_T}{dt} = \frac{1}{m_1 + m_2} [m_1 (-v_1 \cos \gamma) + m_2 a_2 t \sin \beta],$$

$$v_{yT} = \dot{y}_T = \frac{dy_T}{dt} = \frac{1}{m_1 + m_2} [m_1 v_1 \sin \gamma + m_2 a_2 t \cos \beta],$$

odkiaľ po dosadení

$$v_{xT} = 0,519 \text{ ms}^{-1}, \quad v_{yT} = 1,5 \text{ ms}^{-1}.$$

Výsledná rýchlosť ťažiska SHB potom bude

$$v_T = \sqrt{v_{xT}^2 + v_{yT}^2} = 1,587 \text{ ms}^{-1}.$$

### 4. Určenie zrýchlenia ťažiska SHB

Deriváciou vzťahov vyjadrujúcich zložky rýchlosti ťažiska SHB v smeroch osí  $x, y$  podľa času získame zložky zrýchlenia ťažiska SHB v smeroch tých istých osí

$$a_{xT} = \dot{v}_{xT} = \ddot{x}_T = \frac{dv_{xT}}{dt} = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_2 a_2 \sin \beta),$$

$$a_{yT} = \dot{v}_{yT} = \ddot{y}_T = \frac{dv_{yT}}{dt} = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_2 a_2 \cos \beta),$$

odkiaľ po dosadení

$$a_{xT} = 0,519 \text{ ms}^{-2}, \quad a_{yT} = 0,3 \text{ ms}^{-2}.$$

Výsledné zrýchlenie ťažiska SHB potom bude

$$a_T = \sqrt{a_{xT}^2 + a_{yT}^2} = 0,6 \text{ ms}^{-2}.$$

### b) Riešenie s využitím viet o pohybe ťažiska SHB

Z prvej vety o pohybe ťažiska SHB v smeroch osí  $x, y$



$$mv_{xT} = \sum_i m_i v_{ix},$$

$$mv_{yT} = \sum_i m_i v_{iy},$$

sa dajú vyjadriť zložky rýchlosti ťažiska SHB

$$(m_1 + m_2)v_{xT} = -m_1 v_1 \cos \gamma + m_2 a_2 t \sin \beta,$$

$$(m_1 + m_2)v_{yT} = m_1 v_1 \sin \gamma + m_2 a_2 t \cos \beta,$$

odkiaľ

$$v_{xT} = \frac{1}{m_1 + m_2} (-m_1 v_1 \cos \gamma + m_2 a_2 t \sin \beta),$$

$$v_{yT} = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_1 v_1 \sin \gamma + m_2 a_2 t \cos \beta).$$

Z druhej vety o pohybe ťažiska SHB v smeroch osí  $x, y$

$$ma_{xT} = \sum_i m_i a_{ix},$$

$$ma_{yT} = \sum_i m_i a_{iy},$$

sa dajú vyjadriť zložky zrýchlení ťažiska SHB

$$(m_1 + m_2)a_{xT} = m_1 \cdot 0 + m_2 a_2 \sin \beta,$$

$$(m_1 + m_2)a_{yT} = m_1 \cdot 0 + m_2 a_2 \cos \beta,$$

odkiaľ

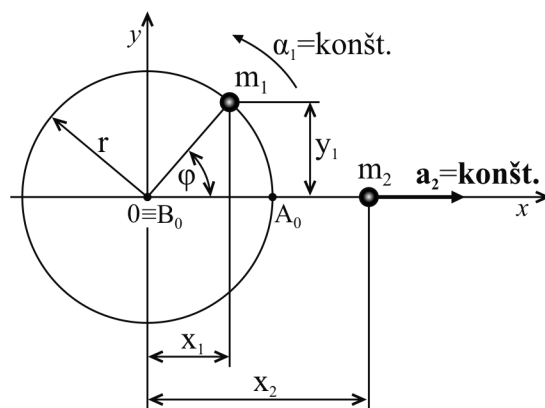
$$a_{xT} = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_2 a_2 \sin \beta),$$

$$a_{yT} = \frac{1}{m_1 + m_2} (m_2 a_2 \cos \beta).$$

### **Príklad 3.2**

Po hladkej vodorovnej rovine sa pohybuje hmotný bod  $m_1$  krivočiario (po kružnici) stálym uhlovým zrýchlením  $\alpha_1$  a hmotný bod  $m_2$  priamočiario zrýchlene. Vypočítajte polohu ťažiska SHB, jeho rýchlosť a zrýchlenie v čase  $t_1$ , ak v čase  $t_0 = 0$  je  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = 0$ , bod  $m_1$  sa nachádza v  $A_0$  a bod  $m_2$  v  $B_0$ .

Dané hodnoty:  $m_1, m_2, \alpha_1, a_2, r, t_1$



Obr. 3.3

#### a) Riešenie derivovaním parametrických rovníc

##### 1. Uvoľnenie

Sily tiaže hmotných bodov a normálové zložky reakcie vodorovnej podložky sú kolmé na podložku, nekreslíme ich. Podložka je hladká, pasívne odpory zanedbáme. Ide o sústavu dvoch hmotných bodov v rovine  $xy$ .

Označíme súradnice jednotlivých hmotných bodov vo všeobecnom časovom okamihu, t.j.  $x_1, y_1, x_2, y_2$ .

##### 2. Určenie polohy (súradníc) ťažiska SHB

Z obr. 3.3 je zrejmé, že súradnice hmotných bodov sú

$$x_1 = r \cos \varphi, \quad y_1 = r \sin \varphi,$$

$$x_2 = \frac{a_2 t^2}{2}, \quad y_2 = 0,$$

pričom si uvedomíme, že hmotný bod  $m_1$  sa pohybuje po kružnici (zrýchlene), teda uhol

pootočenia  $\varphi = \frac{\alpha t^2}{2}$ , hmotný bod  $m_2$  sa pohybuje priamočiaro zrýchlene a jeho dráha je

určená vzťahom  $x = \frac{at^2}{2}$ .

Súradnice ťažiska SHB určíme zo vzťahov

$$mx_T = \sum_i m_i x_i,$$

$$my_T = \sum_i m_i y_i,$$

odkiaľ

$$x_T = \frac{\sum_i m_i x_i}{m} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 r \cos\left(\frac{\alpha_1 t^2}{2}\right) + m_2 \frac{a_2 t^2}{2}}{m_1 + m_2},$$

$$y_T = \frac{\sum_i m_i y_i}{m} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1 r \sin\left(\frac{\alpha_1 t^2}{2}\right) + m_2 \cdot 0}{m_1 + m_2}.$$

### 3. Určenie rýchlosti ťažiska SHB

Deriváciou parametrických rovníc pohybu ťažiska SHB podľa času dostaneme zložky rýchlosti ťažiska SHB v smeroch osí  $x, y$

$$v_{xT} = \dot{x}_T = \frac{dx_T}{dt} = \frac{1}{m_1 + m_2} \left[ -m_1 r \sin\left(\frac{\alpha_1 t^2}{2}\right) \alpha_1 t + m_2 a_2 t \right],$$

$$v_{yT} = \dot{y}_T = \frac{dy_T}{dt} = \frac{1}{m_1 + m_2} \left[ m_1 r \cos\left(\frac{\alpha_1 t^2}{2}\right) \alpha_1 t \right].$$

Výslednú rýchlosť ťažiska SHB potom určíme zo vzťahu

$$v_T = \sqrt{v_{xT}^2 + v_{yT}^2}.$$

### 4. Určenie zrýchlenia ťažiska SHB

Deriváciou vzťahov vyjadrujúcich zložky rýchlosti ťažiska SHB v smeroch osí  $x, y$  podľa času získame zložky zrýchlenia ťažiska SHB v smeroch tých istých síl. Pri derivovaní berieme do úvahy, že ide o deriváciu zložených funkcií a deriváciu súčinu.

$$a_{xT} = \dot{v}_{xT} = \ddot{x}_T = \frac{dv_{xT}}{dt} = \frac{1}{m_1 + m_2} \left\{ -m_1 r \cos\left(\frac{\alpha_1 t^2}{2}\right) \cdot \alpha_1 t \cdot \alpha_1 t + m_1 r \left[ -\sin\left(\frac{\alpha_1 t^2}{2}\right) \right] + m_2 a_2 \right\},$$

$$a_{yT} = \dot{v}_{yT} = \ddot{y}_T = \frac{dv_{yT}}{dt} = \frac{1}{m_1 + m_2} \left\{ m_1 r \left[ -\sin\left(\frac{\alpha_1 t^2}{2}\right) \right] \cdot \alpha_1 t \cdot \alpha_1 t + m_1 r \cos\left(\frac{\alpha_1 t^2}{2}\right) \cdot \alpha_1 \right\}.$$

Vzťahy sú zapísané tak, ako vyšli z derivácií. Je zrejmé, že sa dajú upraviť a zjednodušiť.

Výsledné zrýchlenie ťažiska SHB bude

$$a_T = \sqrt{a_{xT}^2 + a_{yT}^2}.$$

### b) Riešenie s využitím viet o pohybe ťažiska SHB

#### 1. Uvoľnenie

Pri uvoľňovaní postupujeme rovnako ako v prípade a) tohto príkladu.

## 2. Určenie súradníc ťažiska SHB

Použijeme rovnaký postup riešenia ako v prípade a) tohto príkladu.

## 3. Určenie rýchlosti ťažiska SHB

Z 1. vety o pohybe ťažiska SHB v smere osí  $x, y$

$$mv_{xT} = \sum_i m_i v_{ix},$$

$$mv_{yT} = \sum_i m_i v_{iy},$$

odkiaľ po dosadení za

$$v_{1x} = v_1 \sin \varphi = \omega_1 r \sin \varphi = \alpha_1 t r \sin \left( \frac{\alpha_1 t^2}{2} \right), \quad v_{2x} = a_2 t,$$

$$v_{1y} = v_1 \cos \varphi = \omega_1 r \cos \varphi = \alpha_1 t r \cos \left( \frac{\alpha_1 t^2}{2} \right), \quad v_{2y} = 0,$$

dostávame

$$v_{xT} = \frac{1}{m_1 + m_2} \cdot \left[ -m_1 \alpha_1 t r \sin \left( \frac{\alpha_1 t^2}{2} \right) + m_2 a_2 t \right],$$

$$v_{yT} = \frac{1}{m_1 + m_2} \cdot \left[ m_1 \alpha_1 t r \cos \left( \frac{\alpha_1 t^2}{2} \right) \right].$$

## 4. Určenie zrýchlenia ťažiska SHB

Z 2. vety o pohybe ťažiska SHB v smere osí  $x, y$

$$ma_{xT} = \sum_i m_i a_{ix} \quad \Rightarrow \quad (m_1 + m_2) a_{xT} = -m_1 a_{1x} + m_2 a_2,$$

$$ma_{yT} = \sum_i m_i a_{iy} \quad \Rightarrow \quad (m_1 + m_2) a_{yT} = m_1 a_{1y} + m_2 \cdot 0,$$

odkiaľ po dosadení za

$$a_{1x} = a_{tx1} + a_{nx1} = \alpha_1 r \sin \varphi + \omega_1^2 r \cos \varphi = \alpha_1 r \sin \left( \frac{\alpha_1 t^2}{2} \right) + \alpha_1^2 t^2 r \cos \left( \frac{\alpha_1 t^2}{2} \right),$$

$$a_{1y} = a_{ty1} + a_{ny1} = \alpha_1 r \cos \varphi - \omega_1^2 r \sin \varphi = \alpha_1 r \cos \left( \frac{\alpha_1 t^2}{2} \right) - \alpha_1^2 t^2 r \sin \left( \frac{\alpha_1 t^2}{2} \right),$$

dostávame

$$a_{xT} = \frac{1}{m_1 + m_2} \left[ -m_1 \alpha_1 r \sin \left( \frac{\alpha_1 t^2}{2} \right) - m_1 \alpha_1^2 t^2 r \cos \left( \frac{\alpha_1 t^2}{2} \right) + m_2 a_2 \right],$$

$$a_{yT} = \frac{1}{m_1 + m_2} \left[ m_1 \alpha_1 r \cos\left(\frac{\alpha_1 t^2}{2}\right) - m_1 \alpha_1^2 t^2 r \sin\left(\frac{\alpha_1 t^2}{2}\right) \right].$$

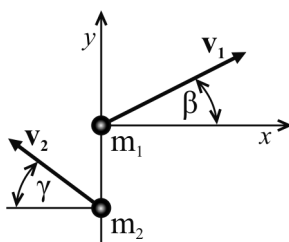
### **Príklad 3.3**

Po hladkej vodorovnej podložke sa pohybuje hmotný bod  $m_1$  rýchlosťou  $v_1$ , hmotný bod  $m_2$  rýchlosťou  $v_2$ . V čase  $t = 0$  je súradnica  $y_2 = -0,5$  m. Určte rýchlosť ťažiska SHB a rovnicu trajektórie, po ktorej sa ťažisko SHB pohybuje.

Dané hodnoty:  $m_1 = 7$  kg,  $m_2 = 2$  kg,  $\beta = 20^\circ$ ,  $\gamma = 30^\circ$ ,  $v_1 = 2$  ms<sup>-1</sup>,  $v_2 = 5$  ms<sup>-1</sup>

#### 1. Uvoľnenie

Hmotné body sa pohybujú po hladkej vodorovnej rovine, to znamená, že neuvažujeme pasívne odpory. Normálové reakcie a ich tiaže sú kolmé na rovinu  $xy$ , nekreslíme ich. Ide o sústavu dvoch hmotných bodov v rovine  $xy$ . Zvolíme si súradnicový systém  $x, y$ .



**Obr.3.4**

#### 2. Určenie rýchlosti ťažiska SHB

Z 1. vety o pohybe ťažiska SHB v smere osí  $x, y$

$$mv_{xT} = \sum_i m_i v_{ix},$$

$$mv_{yT} = \sum_i m_i v_{iy},$$

odkiaľ po dosadení za

$$v_{1x} = v_1 \cos \beta, \quad v_{1y} = v_1 \sin \beta,$$

$$v_{2x} = -v_2 \cos \gamma, \quad v_{2y} = v_2 \sin \gamma,$$

dostávame zložky rýchlostí ťažiska SHB v smeroch osí  $x, y$

$$v_{xT} = \frac{m_1 v_1 \cos \beta - m_2 v_2 \cos \gamma}{m_1 + m_2} = -0,512 \text{ ms}^{-1},$$

$$v_{yT} = \frac{m_1 v_1 \sin \beta + m_2 v_2 \sin \gamma}{m_1 + m_2} = 1,344 \text{ ms}^{-1}.$$

Výsledná rýchlosť ťažiska SHB je

$$v_T = \sqrt{v_{xT}^2 + v_{yT}^2} = 1,438 \text{ ms}^{-1}.$$

Smer rýchlosti ťažiska SHB určíme napríklad

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{v_{xT}}{v_{yT}} \quad \Rightarrow \quad \delta = 20^\circ 52'.$$

### 3. Určenie rovnice trajektórie ťažiska SHB

Rovnica trajektórie ťažiska SHB je určená funkciou

$$y_T = f(x_T),$$

kde  $x_T = f(t)$  je parametrickou rovnicou pohybu ťažiska SHB v smere osí  $x$ , čas  $t$  je parameter a v rovnici trajektórie  $x_T$  predstavuje nezávislú premennú.

Našou úlohou je získať parametrické rovnice pohybu ťažiska SHB v smeroch osí  $x, y$ . Keďže z predchádzajúceho riešenia (pozri bod 2 tohto príkladu) poznáme zložky rýchlostí ťažiska sústavy, potom sa k parametrickým rovniciam pohybu dostaneme riešením diferenciálnych rovníc

$$\begin{aligned} v_{xT} = \frac{dx_T}{dt} &= \frac{m_1 v_1 \cos \beta - m_2 v_2 \cos \gamma}{m_1 + m_2} = K_1 \text{ (konštanta)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_T}{dt} = K_1, \\ v_{yT} = \frac{dy_T}{dt} &= \frac{m_1 v_1 \sin \beta - m_2 v_2 \sin \gamma}{m_1 + m_2} = K_2 \text{ (konštanta)} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy_T}{dt} = K_2. \end{aligned}$$

Po integrovaní výrazov

$$dx_T = K_1 dt,$$

$$dy_T = K_2 dt,$$

dostávame

$$x_T = K_1 t + C_1,$$

$$y_T = K_2 t + C_2,$$

kde  $C_1, C_2$  sú integračné konštanty, ktoré určíme zo začiatkových podmienok nasledovným spôsobom:

$$\begin{aligned} \text{ak } t = 0, \quad \text{potom } x_T = 0, \quad \text{odkiaľ } C_1 = 0, \\ t = 0, \quad y_T = \frac{-m_2 y_2}{m_1 + m_2} = -0,1818 \text{ m}, \quad C_2 = -0,1818. \end{aligned}$$

Po dosadení integračných konštánt dostávame parametrické rovnice pohybu ťažiska SHB v smere osí  $x, y$

$$x_T = K_1 t,$$

$$y_T = K_2 t - 0,1818.$$

Z oboch parametrických rovníc vylúčením parametra  $t$ , t.j. času, dostaneme rovnicu trajektórie ťažiska SHB

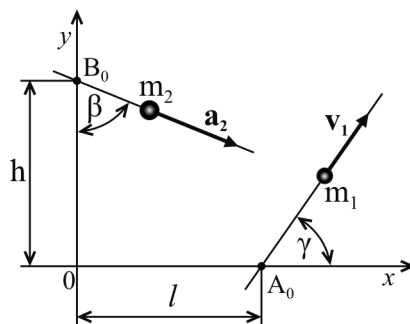
$$y_T = \frac{K_2}{K_1} x_T - 0,1818 = -2,62 x_T - 0,1818,$$

čo je rovnica priamky.

### **Príklad 3.4**

Po hladkej vodorovnej podložke sa pohybuje hmotný bod  $m_1$  konštantnou rýchlosťou  $v_1$ , hmotný bod  $m_2$  konštantným zrýchlením  $a_2$ . V čase  $t = 0$  je  $m_1$  v  $A_0$ ,  $m_2$  v  $B_0$ . Určte polohu ťažiska SHB, jeho rýchlosť, zrýchlenie v čase  $t_1$ .

Dané hodnoty:  $m_1 = 3$  kg,  $m_2 = 4$  kg,  $h = 5$  m,  $l = 2$  m,  $v_T = 1$  ms<sup>-1</sup>,  $a_2 = 2$  ms<sup>-2</sup>,  $\beta = 30^\circ$ ,  $\gamma = 35^\circ$ ,  $t_1 = 4$  s



Obr. 3.5

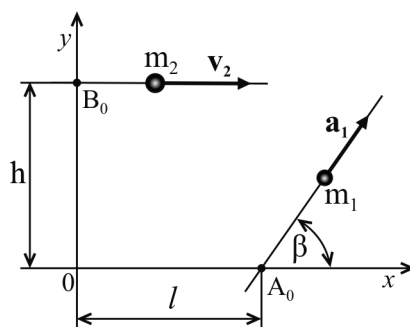
$$(x_T = 6,83 \text{ m}, y_T = -4,078 \text{ m}, v_{xT} = 2,64 \text{ ms}^{-1}, v_{yT} = -3,71 \text{ ms}^{-1}, v_T = 4,55 \text{ ms}^{-1},$$

$$a_{xT} = 0,577 \text{ ms}^{-2}, a_{yT} = -0,989 \text{ ms}^{-2}, a_T = 1,142 \text{ ms}^{-2})$$

### **Príklad 3.5**

Po hladkej vodorovnej podložke sa pohybuje hmotný bod  $m_1$  konštantným zrýchlením  $a_1$ , hmotný bod  $m_2$  konštantnou rýchlosťou  $v_2$ . V čase  $t = 0$  je  $m_1$  v  $A_0$ ,  $m_2$  v  $B_0$ . Určte polohu ťažiska SHB, jeho rýchlosť, zrýchlenie v čase  $t_1$ .

Dané hodnoty:  $m_1 = 2$  kg,  $m_2 = 3$  kg,  $h = 2$  m,  $l = 1$  m,  $a_1 = 1$  ms<sup>-2</sup>,  $v_2 = 2$  ms<sup>-1</sup>,  $\beta = 30^\circ$ ,  $t_1 = 4$  s



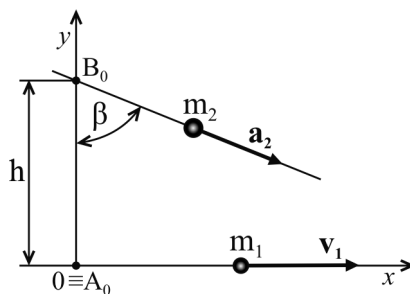
Obr.3.6

$$(x_T = 7,9 \text{ m}, y_T = 2,8 \text{ m}, v_{xT} = 2,58 \text{ ms}^{-1}, v_{yT} = 0,8 \text{ ms}^{-1}, v_T = 2,7 \text{ ms}^{-1}, \\ a_{xT} = 0,34 \text{ ms}^{-2}, a_{yT} = 0,2 \text{ ms}^{-2}, a_T = 0,39 \text{ ms}^{-2})$$

### Príklad 3.6

Po hladkej vodorovnej podložke sa pohybuje hmotný bod  $m_1$  konštantnou rýchlosťou  $v_1$ , hmotný bod  $m_2$  konštantným zrýchlením  $a_2$ . V čase  $t = 0$  je  $m_1$  v  $A_0$ ,  $m_2$  v  $B_0$ . Určte polohu ťažiska SHB, jeho rýchlosť, zrýchlenie v čase  $t_1$ .

Dané hodnoty:  $m_1 = 4 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 3 \text{ kg}$ ,  $h = 2 \text{ m}$ ,  $v_1 = 1 \text{ ms}^{-1}$ ,  $a_2 = 2 \text{ ms}^{-2}$ ,  $\beta = 20^\circ$ ,  $t_1 = 5 \text{ s}$



Obr.3.7

$$(x_T = 6,52 \text{ m}, y_T = -9,2 \text{ m}, v_{xT} = 2,037 \text{ ms}^{-1}, v_{yT} = -4,027 \text{ ms}^{-1}, v_T = 4,513 \text{ ms}^{-1}, \\ a_{xT} = 0,29 \text{ ms}^{-2}, a_{yT} = -0,805 \text{ ms}^{-2}, a_T = 0,856 \text{ ms}^{-2})$$

### Príklad 3.7

Z bodu A sa začnú pohybovať po spoločnej hladkej priamke hmotné body  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ . Bod  $m_1$  sa pohybuje smerom vľavo konštantnou rýchlosťou  $v_1$ , bod  $m_2$  smerom vpravo konštantným zrýchlením  $a_2$  a bod  $m_3$  konštantným zrýchlením  $a_3$ ,



ktorého veľkosť a orientáciu nepoznáme. Vypočítajte  $v_3$  a  $a_3$  v čase  $t_1$  za predpokladu, že ťažisko SHB nemení svoju polohu.

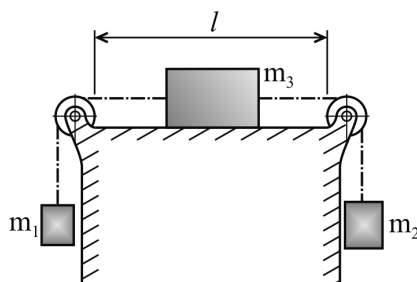
Dané hodnoty:  $m_1 = 2 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 4 \text{ kg}$ ,  $m_3 = 3 \text{ kg}$ ,  $v_1 = -2 \text{ ms}^{-1}$ ,  $a_2 = 1 \text{ ms}^{-2}$ ,  $t_1 = 2 \text{ s}$

$$(v_3 = -1,33 \text{ ms}^{-1}, a_3 = -1,33 \text{ ms}^{-2})$$

### **Príklad 3.8**

Bremeno o hmotnosti  $m_3$  sa pohybuje po drsnej vodorovnej podložke (koeficient šmykového trenia je  $f$ ) prostredníctvom lán, ktoré sú cez kladky pripojené k bremenám o hmotnostiach  $m_1$ ,  $m_2$ . Aká bude podmienka, aby sa bremeno  $m_3$  pohybovalo zľava doprava a aká bude jeho rýchlosť po prejdení dráhy  $l$ ? Pasívne odpory v kladkách zanedbajte.

Dané hodnoty:  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $m_3$ ,  $l$ ,  $f$



**Obr.3.8**

(Z vety o zmene veľkosti kinetickej energie sústavy vyplynie

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2 + m_3)v^2 = m_2 gx - m_1 gx - F_t x,$$

odkiaľ po dosadení za  $x = l$  vypočítame rýchlosť  $v$ ,

ktorá je rovnaká pre všetky tri bremená:

$$v = \sqrt{\frac{2gl(m_2 - m_1 - fm_3)}{m_1 + m_2 + m_3}}.$$

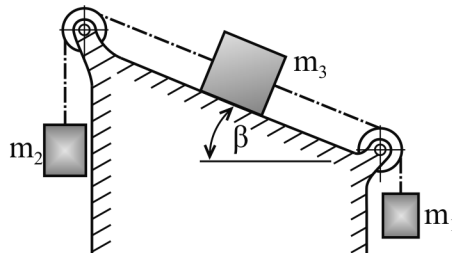
Aby bol výraz pod odmocninou kladný, musí platiť  $m_2 > m_1 + fm_3$ ,

čo je podmienkou pre pohyb bremena  $m_3$  zľava doprava)

### **Príklad 3.9**

Po drsnej naklonenej roviny sa pohybuje bremeno  $m_3$ . Lanom cez kladky je spojené s bremenami  $m_1$ ,  $m_2$ . Určte rýchlosť bremena  $m_3$  po prejdení dráhy  $x$ . Ostatné pasívne odpory zanedbajte.

Dané hodnoty:  $m_1, m_2, m_3, x, f_3$



Obr.3.9

(Bremená  $m_1, m_2, m_3$  považujeme za sústavu hmotných bodov, preto použijeme vetu o zmene kinetickej energie SHB, odkiaľ rýchlosť bremena  $m_3$  bude

$$v_3 = \sqrt{\frac{2gx(m_2 - m_1 - fm_3 \cos \beta - m_3 \sin \beta)}{m_1 + m_2 + m_3}} .)$$

### **Príklad 3.10**

Čln o hmotnosti  $m_1$  stojí (nepohybuje sa) na vodnej hladine. Človek o hmotnosti  $m_2$  prejde z prednej časti člna na zadnú na dráhe  $l$ . Ak zanedbáme odpor vody, určte, ako a o koľko sa pritom čln pohne.

Dané hodnoty:  $m_1 = 600 \text{ kg}, m_2 = 20 \text{ kg}, l = 5 \text{ m}$

(pohne sa dopredu o 0,59 m)

### **Príklad 3.11**

Kozmická loď o hmotnosti  $m_1$  sa pri spojení s orbitálnym komplexom o hmotnosti  $m_2$  pohybuje voči orbitálnemu komplexu rýchlosťou  $v_1$ . Ako sa zmení rýchlosť spojeného komplexu tesne po dotyku?

Dané hodnoty:  $m_1 = 400 \text{ kg}, m_2 = 12\,000 \text{ kg}, v_1 = 0,4 \text{ ms}^{-1}$

(spojený komplex bude mať vyššiu rýchlosť o 0,1  $\text{ms}^{-1}$ )

## 4 GEOMETRIA HMÔT

### 4.1 Momenty zotrvačnosti

Skúmame rozloženie hmoty s využitím rôznych veličín a vzťahov medzi nimi, nezávisle na čase.

Momentom zotrvačnosti hmotného bodu k osi (rovine, bodu) rozumieme súčin jeho hmotnosti a druhej mocniny jeho vzdialenosti od tejto osi (roviny, bodu) a označujeme ho písmenom  $I$  s príslušným indexom, pričom hovoríme o osovom (rovinnom, polárnom) momente zotrvačnosti.

Moment zotrvačnosti sústavy hmotných bodov sa rovná súčtu momentov zotrvačnosti jednotlivých hmotných bodov.

Ak  $m_i$  je hmotnosť  $i$ -teho hmotného bodu  $M_i$ ,  $c_{i0}$  ( $c_{i\alpha}, c_{ip}$ ) je jeho vzdialenosť od osi  $O$  (roviny  $\alpha$ , bodu  $P$ ), odpovedajúci osový (rovinný, polárny) moment zotrvačnosti  $I_0$ , ( $I_\alpha, I_p$ ) je určený

$$I_0 = \sum_i m_i c_{i0}^2, \quad I_\alpha = \sum_i m_i c_{i\alpha}^2, \quad I_p = \sum_p m_i c_{ip}^2,$$

kde  $i = 1, 2, \dots, n$ .

V pravouhlej kartézskej súradnicovej sústave  $0, x, y$  budú momenty zotrvačnosti určené k osiam

$$I_x = \sum_i m_i c_{ix}^2 = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2),$$

$$I_y = \sum_i m_i c_{iy}^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2),$$

$$I_z = \sum_i m_i c_{iz}^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2),$$

k rovinám

$$I_{xy} = \sum_i m_i z_i^2, \quad I_{xz} = \sum_i m_i y_i^2, \quad I_{yz} = \sum_i m_i x_i^2$$

k začiatku súradnicovej sústavy (k bodu)  $0$

$$I_p = \sum_i m_i c_{i0}^2 = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2).$$

Súvis medzi jednotlivými momentmi zotrvačnosti je

$$I_x = I_{xz} + I_{xy}, \quad I_y = I_{xy} + I_{yz}, \quad I_z = I_{xz} + I_{yz},$$

$$I_p = \frac{1}{2}(I_x + I_y + I_z).$$

Polomer zotrvačnosti  $i_0$  je vzdialenosť hmotného bodu, do ktorého sústredíme hmotnosť celej SHB, pričom jeho moment zotrvačnosti k osi bude rovnaký ako mala pôvodná sústava, čiže platí

$$I_0 = m i_0^2.$$

Deviačné momenty sú určené

$$D_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i, \quad D_{xz} = \sum_i m_i x_i z_i, \quad D_{yz} = \sum_i m_i y_i z_i.$$

Ak sú deviačné momenty k osiam  $x, y$  rovné nule, potom sú osi  $x, y$  hlavnými osami zotrvačnosti a momenty zotrvačnosti počítané k nim sú hlavnými momentmi zotrvačnosti.

Ak hlavné osi zotrvačnosti prechádzajú ťažiskom sústavy, nazývame ich hlavnými centrálnymi osami zotrvačnosti a momenty zotrvačnosti k nim sú hlavnými centrálnymi momentmi zotrvačnosti.

## 4.2 Momenty zotrvačnosti k pootočenej osi

Majme sústavu hmotných bodov  $m_i$ , kde  $i = 1, 2, \dots, n$ , ktorej momenty zotrvačnosti v pravouhlej kartézskej súradnicovej sústave  $0, x, y, z$  sú  $I_x, I_y, I_z, D_{xy}, D_{yz}, D_{xz}$ . Uvažujme os  $0$ , ktorá prechádza začiatkom súradnicovej sústavy  $0$  a s osami  $x, y, z$  zvierá uhly  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Moment zotrvačnosti k pootočenej osi  $0$  je

$$I_0 = I_x \cos^2 \alpha + I_y \cos^2 \beta + I_z \cos^2 \gamma - 2D_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2D_{xz} \cos \alpha \cos \gamma - 2D_{yz} \cos \beta \cos \gamma$$

Označme hlavné momenty zotrvačnosti  $I_1, I_2, I_3$ . Pre hlavné osi zotrvačnosti platí

$$D_{xy} = D_{xz} = D_{yz} = 0, \text{ potom}$$

$$I_0 = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma.$$

Ak hľadáme takú množinu bodov, ktoré spĺňajú podmienku, že ich vzdialenosť od začiatku súradnicovej sústavy je rovná  $d = \frac{1}{\sqrt{I_0}}$ , ich súradnice sú

$$x = d \cos \alpha, \quad y = d \cos \beta, \quad z = d \cos \gamma.$$

Pre smerové kosínusy platí

$$\cos \alpha = x \sqrt{I_0}, \quad \cos \beta = y \sqrt{I_0}, \quad \cos \gamma = z \sqrt{I_0},$$

potom výraz

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 - 2D_{xy}xy - 2D_{yz}yz - 2D_{xz}xz = 1$$

je rovnicou elipsoidu zotrvačnosti so stredom v začiatku súradnicovej sústavy.

Ak osi  $x, y, z$  sú hlavnými centrálnymi osami zotrvačnosti, potom rovnica elipsoidu zotrvačnosti má tvar

$$I_1 x^2 + I_2 y^2 + I_3 z^2 = 1,$$

ktorého polosi majú veľkosti

$$a = \frac{1}{\sqrt{I_1}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{I_2}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{I_3}}.$$

#### 4.2.1 Deviačné momenty k pootočeným osiam

Majme súradnicový systém  $0, x, y, z$ , v ktorom súradnice ľubovoľného bodu  $m_i$  sú  $x_i, y_i, z_i$ . Uvažujme súradnicový systém  $0, x_1, y_1, z_1$ , ktorý je pootočený okolo osi  $z = z_1$  o uhol  $\varphi$ . Súradnice bodu  $m_i$  v pootočenom súradnicovom systéme  $0, x_1, y_1, z_1$  sú

$$x_1 = x_i \cos \varphi + y_i \sin \varphi,$$

$$y_1 = y_i \cos \varphi - x_i \sin \varphi,$$

$$z_1 = z_i.$$

Potom deviačné momenty k pootočeným osiam  $x_1, y_1, z_1$  budú

$$D_{x_1 y_1} = D_{xy} \cos 2\varphi + \frac{1}{2}(I_{xz} - I_{yz}) \sin 2\varphi,$$

$$D_{y_1 z_1} = D_{yz} \cos \varphi - D_{xz} \sin \varphi,$$

$$D_{x_1 z_1} = D_{xz} \cos \varphi + D_{yz} \sin \varphi.$$

#### 4.3 Momenty zotrvačnosti k posunutým (rovnobežným) osiam

Majme pravouhlú kartézsku súradnicovú sústavu  $0, x, y, z$ . Nech osi  $x_1, y_1, z_1$  prechádzajú ťažiskom  $T(x_T, y_T, z_T)$  sústavy hmotných bodov a nech sú rovnobežné s osami  $x, y, z$ . Medzi súradnicami platia transformačné vzťahy

$$x_1 = x_T + x_{iT}, \quad y_1 = y_T + y_{iT}, \quad z_1 = z_T + z_{iT}.$$

Potom osový moment zotrvačnosti k osi  $x$  je

$$I_x = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) = \sum_i m_i [(y_T + y_{iT})^2 + (z_T + z_{iT})^2].$$

Označme  $a$  vzdialenosť osí  $x, x_1$ , potom

$$a^2 = y_T^2 + z_T^2.$$

Momenty zotrvačnosti k posunutým (rovnobežným) osiam sú

$$I_x = I_{x_1} + ma^2,$$

$$I_y = I_{y_1} + mb^2,$$

$$I_z = I_{z_1} + mc^2,$$

kde  $m = \sum m_i$  je celková hmotnosť sústavy hmotných bodov,

$a, b, c$  sú vzdialenosti osí  $x, x_1$ ;  $y, y_1$ ;  $z, z_1$ ,

$I_{x_1}, I_{y_1}, I_{z_1}$  momenty zotrvačnosti k osiam prechádzajúcim ťažiskom sústavy.

Momenty zotrvačnosti  $I_x, I_y, I_z$  k posunutým osiam sú vyjadrením Steinerovej vety, ktorá hovorí: moment zotrvačnosti (sústavy hmotných bodov) k určitej osi sa rovná súčtu momentu zotrvačnosti k rovnobežnej osi prechádzajúcej ťažiskom sústavy a súčinu (celkovej) hmotnosti s druhou mocninou vzdialenosti oboch osí.

Deviačné momenty sú

$$D_{xy} = \sum_i m_i x_i y_i = \sum_i m_i (x_T + x_{iT})(y_T + y_{iT}),$$

po úprave

$$D_{xy} = D_{x_1 y_1} + x_T y_T m,$$

$$D_{yz} = D_{y_1 z_1} + y_T z_T m,$$

$$D_{xz} = D_{x_1 z_1} + x_T z_T m.$$

Momenty zotrvačnosti k posunutým (rovnobežným) rovinám

$$I_{xy} = I_{x_1 y_1} + m z_T^2,$$

$$I_{xz} = I_{x_1 z_1} + m y_T^2,$$

$$I_{yz} = I_{y_1 z_1} + m x_T^2,$$

kde  $x_T, y_T, z_T$  sú vzdialenosti rovín  $yz, y_1 z_1$ ;  $xz, x_1 z_1$ ;  $xy, x_1 y_1$ .

Polárny moment zotrvačnosti k začiatku súradnicového systému 0 je

$$I_p = \sum_i m_i (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) = \sum_i m_i [(x_T + x_{iT})^2 + (y_T + y_{iT})^2 + (z_T + z_{iT})^2]$$

po úprave

$$I_p = I_T + m(x_T^2 + y_T^2 + z_T^2) = I_T + m r_T^2,$$

kde  $r_T$  je vzdialenosť bodov 0 a T.

#### 4.4 Momenty zotrvačnosti tuhého telesa

Ak vo vzťahoch pre výpočet momentov zotrvačnosti pre sústavu hmotných bodov súčty nahradíme limitami, teda počet hmotných bodov sa blíži nekonečnu, potom môžeme aplikovať vzťahy pre výpočet momentov zotrvačnosti pre sústavu hmotných bodov aj pre tuhé teleso s homogénnou štruktúrou.

Potom osovú momenty zotrvačnosti tuhého telesa sú

$$I_x = \int_m (y^2 + z^2) dm, \quad I_y = \int_m (x^2 + z^2) dm, \quad I_z = \int_m (x^2 + y^2) dm,$$

rovinné momenty zotrvačnosti sú

$$I_{xy} = \int_m z^2 dm, \quad I_{yz} = \int_m x^2 dm, \quad I_{xz} = \int_m y^2 dm.$$

Polárny moment zotrvačnosti

$$I_p = \int_m (x^2 + y^2 + z^2) dm.$$

Deviačné momenty zotrvačnosti sú

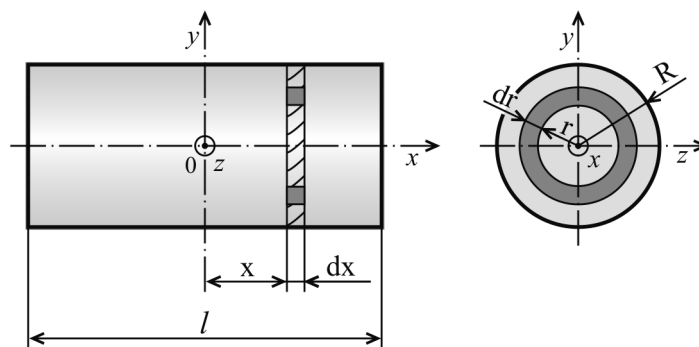
$$D_{xy} = \int_m xy dm, \quad D_{yz} = \int_m yz dm, \quad D_{xz} = \int_m xz dm.$$

#### 4.5 Príklady

##### Príklad 4.1

Vypočítajte momenty zotrvačnosti homogénneho valca k osiam a rovinám prechádzajúcim jeho ťažiskom.

Dané hodnoty:  $l = 32,4$  cm,  $R = 0,05$  m,  $m = 5$  kg



Obr.4.1

Element objemu dutého valca je  $dV = 2\pi r l dr$ , element hmotnosti  $dm = \rho dV$ , kde

$\rho$  je merná hmotnosť  $\rho = \frac{m}{V}$ , potom  $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 l}$ .

Osový moment zotrvačnosti k osi  $x$

$$I_x = \int_m r^2 dm = \int_m (z^2 + y^2) dm = \int_m z^2 dm + \int_m y^2 dm = I_{xy} + I_{xz}.$$

$$I_x = \int_m r^2 dm = \int_0^R r^2 2\pi r l \rho dr = 2\pi \rho l \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi \rho l R^4}{2},$$

pretože  $\rho = \frac{m}{\pi R^2 l}$ , potom

$$I_x = \frac{\pi l R^4}{2} \cdot \frac{m}{\pi R^2 l} = \frac{m R^2}{2} = 0,00625 \text{ kgm}^2.$$

Osový moment zotrvačnosti k osi  $y$

$$I_y = \int_m (x^2 + z^2) dm = \int_m x^2 dm + \int_m z^2 dm = I_{yz} + I_{xy},$$

$$I_{yz} = \int_m x^2 dm.$$

Ak

$$dm = \rho dV, \quad dV = \pi R^2 dx, \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi R^2 l},$$

potom

$$dm = \pi R^2 dx \frac{m}{\pi R^2 l} = \frac{m}{l} dx,$$

teda

$$I_{yz} = \int_m x^2 dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} x^2 \frac{m}{l} dx = \frac{m}{l} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} = \frac{m}{l} \left[ \frac{l^3}{24} + \frac{l^3}{24} \right],$$

$$I_{yz} = \frac{ml^2}{12} = 0,04374 \text{ kgm}^2.$$

Roviny  $xy$ ,  $xz$  sú rovinami symetrie, platí

$$I_{xy} = I_{xz},$$

teda

$$I_x = I_{xy} + I_{xz} = 2I_{xy} \quad \Rightarrow \quad I_{xy} = \frac{I_x}{2} = \frac{mR^2}{4}.$$

Potom k osi  $y$

$$I_y = I_{xz} + I_{xy} = \frac{ml^2}{12} + \frac{mR^2}{4} = 0,046865 \text{ kgm}^2.$$



Je zrejmé, že platí  $I_z = I_y = 0,046865 \text{ kgm}^2$ .

Momenty zotrvačnosti k rovinám sú

$$I_{xy} = \frac{mR^2}{4} = 0,003125 \text{ kgm}^2,$$

$$I_{xz} = \frac{mR^2}{4} = 0,003125 \text{ kgm}^2,$$

$$I_{yz} = \frac{ml^2}{12} = 0,04376 \text{ kgm}^2.$$

Ak rozmer  $l$  (dĺžka) homogénneho valca je oveľa väčší ako jeho polomer, potom je možné vo vzťahu

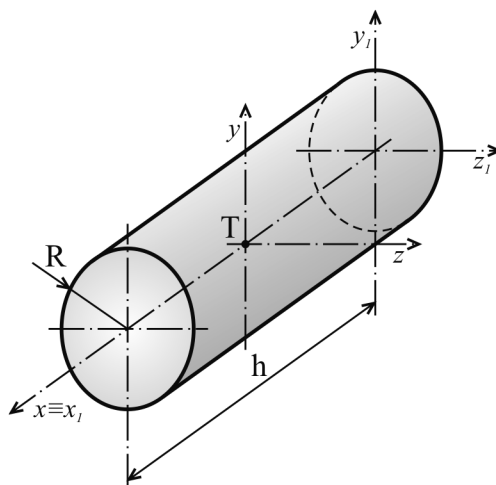
$$I_y = I_z = \frac{mR^2}{4} + \frac{ml^2}{12},$$

zanedbať časť  $\frac{mR^2}{4}$ .

### **Príklad 4.2**

Určte momenty zotrvačnosti homogénneho valca k osiam a rovinám, ktoré sú posunuté a rovnobežné s osami (a rovinami), ktoré prechádzajú ťažiskom valca.

Dané veličiny:  $h, R$



**Obr.4.2**

Pre osové momenty zotrvačnosti homogénneho valca k osiam prechádzajúcim jeho ťažiskom platí

$$I_x = \frac{mR^2}{2}, \quad I_y = I_z = \frac{1}{12}m(h^2 + 3R^2),$$

ďalej pre rovinný moment k rovine  $yz$  platí

$$I_{yz} = \frac{I_y + I_z - I_x}{2} = \frac{\frac{m}{12}(h^2 + 3R^2) + \frac{m}{12}(h^2 + 3R^2) - \frac{mR^2}{2}}{2},$$

$$I_{yz} = \frac{\frac{m}{6}(h^2 + 3R^2) - \frac{mR^2}{2}}{2}.$$

Podľa Steinerovej vety k posunutým osiam  $x_1, y_1, z_1$

$$I_{x_1} = I_x,$$

$$I_{y_1} = I_y + m \frac{h^2}{4},$$

$$I_{z_1} = I_z + m \frac{h^2}{4}.$$

K posunutej rovine  $z_1y_1$

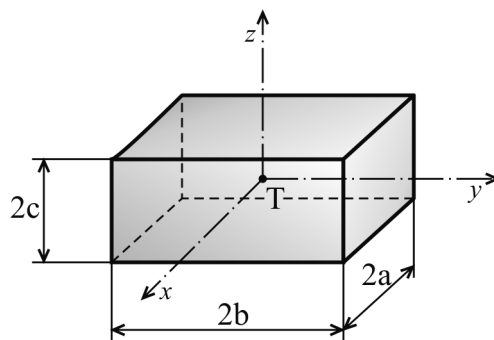
$$I_{z_1y_1} = \frac{I_{y_1} + I_{z_1} - I_{x_1}}{2} = \frac{I_y + m \frac{h^2}{2} + I_z + m \frac{h^2}{4} - I_x}{2},$$

$$I_{z_1y_1} = \frac{m}{12}(h^2 + 3R^2) + \frac{mh^2}{4} - \frac{mR^2}{4}.$$

### **Príklad 4.3**

Určte momenty zotrvačnosti homogénneho kvádra k osiam, ktoré prechádzajú jeho ťažiskom.

Dané veličiny:  $a, b, c$



**Obr.4.3**

Element hmotnosti kvádra

$$dm = \rho dV = \rho dx dy dz,$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{8abc}.$$

Osový moment zotrvačnosti k osi  $x$  je

$$I_x = \iiint (y^2 + z^2) \rho dx dy dz = \frac{m}{8abc} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_{-c}^c (y^2 + z^2) dx dy dz,$$

$$I_x = \frac{m}{3} (b^2 + c^2),$$

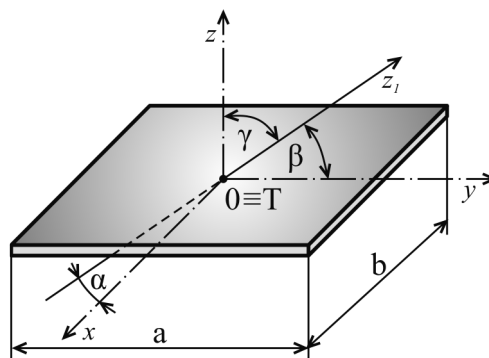
analogicky potom momenty zotrvačnosti k osiam  $y, z$

$$I_y = \frac{m}{3} (c^2 + a^2), \quad I_z = \frac{m}{3} (a^2 + b^2).$$

#### **Príklad 4.4**

Určte moment zotrvačnosti tenkej dosky v tvare obdĺžnika k osi  $z_1$ , ktorá prechádza jeho ťažiskom a s osami  $x, y, z$  zvierá uhly  $\alpha, \beta, \gamma$ .

Dané hodnoty:  $\alpha = 90^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $\gamma = 60^\circ$ ,  $a, b$



**Obr.4.4**

Moment zotrvačnosti k pootočenej osi  $z_1$  je

$$I_{z_1} = I_1 \cos^2 \alpha + I_2 \cos^2 \beta + I_3 \cos^2 \gamma,$$

kde  $I_1, I_2, I_3$  sú hlavné centrálné momenty zotrvačnosti dosky v súradnom systéme  $0, x, y, z$ .

Pretože uhol  $\alpha = 90^\circ$ , potom  $\cos \alpha = 0$ , teda zložka  $I_1 \cos^2 \alpha = 0$ .

Moment zotrvačnosti dosky k osi  $y$  je

$$I_y = I_2 = \frac{mb^2}{12}.$$

Moment zotrvačnosti k osi  $z$  je

$$I_z = I_3 = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2).$$

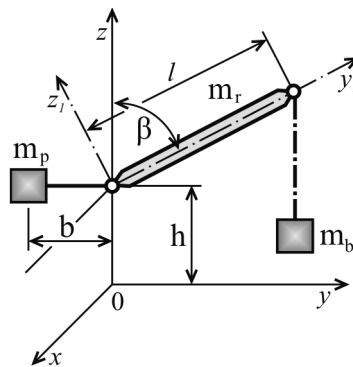
Potom moment zotrvačnosti dosky k osi  $z_1$  je

$$I_{z_1} = \frac{1}{12} m b^2 \cos^2 30^\circ + \frac{1}{12} m (a^2 + b^2) \cos^2 60^\circ = \frac{m}{12} \left( b^2 + \frac{a^2}{4} \right).$$

#### **Príklad 4.5**

Otočná časť vežového žeriava je zložená z ramena  $m_r$  dĺžky  $l$ , protizávažia  $m_p$  a bremena  $m_b$  zaveseného na lane dĺžky  $a$ . Os ramena zvierá s osou rotácie  $z$  uhol  $\beta$ . Ťažisko protizávažia má súradnice  $b, h$ . Vypočítajte moment zotrvačnosti žeriava k osi otáčania  $z$  a deviačný moment k osiam  $y, z$ , ak protizávažie a bremeno považujeme za hmotné body a rameno za tenkú homogénnu tyč. Rovina symetrie je totožná s rovinou  $yz$ .

Dané veličiny:  $m_r, m_p, l, a, \beta, b, h$



**Obr.4.5**

Keďže otočná časť žeriava je zložená z troch častí, potom moment zotrvačnosti žeriava k osi  $z$  je

$$I_z = I_{zr} + I_{zp} + I_{zb}.$$

Momenty zotrvačnosti častí žeriava, ktoré považujeme za hmotné body (protizávažie, bremeno) sú

$$I_{zp} = m_p b^2, \quad I_{zb} = m_b l^2 \sin^2 \beta.$$

Moment zotrvačnosti ramena žeriava k (pootočenej) osi otáčania  $z$  určíme zo vzťahu

$$I_{zr} = I_{1r} \cos^2 \alpha + I_{2r} \cos^2 \beta + I_{3r} \cos^2 \gamma,$$

kde  $I_{1r}, I_{2r}, I_{3r}$  sú hlavné momenty zotrvačnosti ramena k osiam  $x_1, y_1, z_1$ . Pretože osi  $x, x_1$  zvierajú uhol  $\alpha = 0$ , potom

$$I_{1r} = 0, \quad I_{2r} = 0,$$

a keďže rameno žeriava považujeme za tenkú tyč, potom k osi  $z_1$

$$I_{3r} = \frac{m_r l^2}{3} \sin^2 \beta.$$

Moment zotrvačnosti žeriava k osi  $z$  potom bude

$$I_z = m_p b^2 + l^2 \sin^2 \beta \left( \frac{m_r}{3} + m_b \right).$$

Deviačné momenty protizávažia a bremena (ako hmotných bodov) k osiam  $y, z$  sú

$$D_{yz,p} = m_p (-b)h = -m_p bh,$$

$$D_{yz,b} = m_b l \sin \beta (l \cos \beta + h - a).$$

Deviačné momenty  $D_{xz}$ ,  $D_{xy}$  sú rovné nule, pretože otočná časť žeriava sa nachádza v rovine  $yz$  (rovina symetrie).

Deviačný moment ramena žeriava určíme integráciou. Hmotnosť elementu ramena je

$$dm = \frac{m_r}{l} dy_1,$$

jeho súradnice k bodu 0 sú

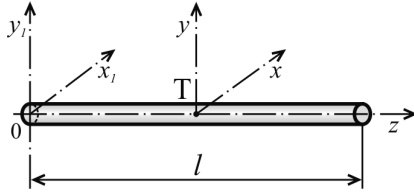
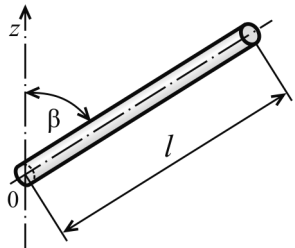
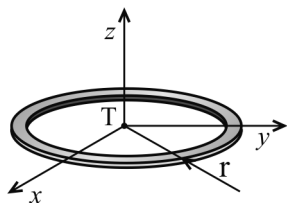
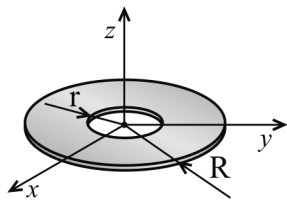
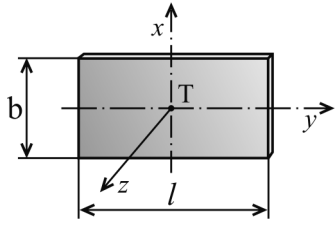
$$y = y_1 \sin \beta, \quad z = y_1 \cos \beta + h.$$

Potom deviačný moment ramena žeriava k osiam  $y, z$  je

$$D_{yz,r} = \int_m yz dm = \frac{m_r}{l} \int_0^l y_1 \sin \beta (y_1 \cos \beta + h) dy_1 = m_r l \sin \beta \left( \frac{h}{2} + \frac{l}{3} \cos \beta \right).$$

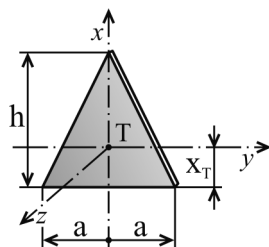
Výsledný deviačný moment žeriava k osiam  $y, x$  je  $D_{yz} = D_{yz,r} + D_{yz,p} + D_{yz,b}$ .

Tabuľka 4.1

<p><b>TENKÝ PRÚT</b></p> 	<p><i>Momenty zotrvačnosti</i></p> $I_x = I_y = \frac{ml^2}{12}, \quad I_{x_1} = I_{y_1} = \frac{ml^2}{3}$
<p><b>TENKÝ PRÚT</b></p> 	<p><i>Moment zotrvačnosti</i></p> $I_z = \frac{m}{3} l^2 \sin^2 \beta$
<p><b>TENKÝ PRSTENEC</b></p> 	<p><i>Momenty zotrvačnosti</i></p> $I_x = I_y = \frac{mr^2}{2}, \quad I_z = mr^2$
<p><b>TENKÁ KRUHOVÁ DOSKA</b></p> 	<p><i>Momenty zotrvačnosti</i></p> $I_x = I_y = \frac{m}{4} (R^2 + r^2), \quad I_z = \frac{m}{2} (R^2 + r^2)$
<p><b>TENKÁ OBDĹŽNIKOVÁ DOSKA</b></p> 	<p><i>Momenty zotrvačnosti</i></p> $I_x = \frac{m}{12} l^2, \quad I_y = \frac{m}{12} b^2, \quad I_z = \frac{m}{12} (b^2 + l^2)$

Tabuľka 4.1 (pokračovanie)

**TENKÁ TROJUHLNÍKOVÁ DOSKA**



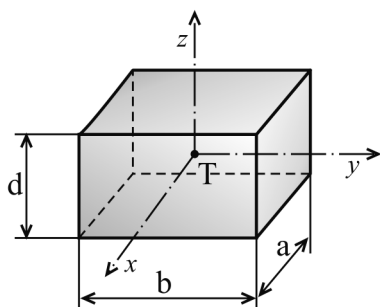
**Momenty zotrvačnosti**

$$I_x = \frac{m}{6} a^2, \quad I_y = \frac{m}{18} h^2, \quad I_z = \frac{m}{18} (3a^2 + h^2)$$

**Súradnice ťažiska**

$$x_T = \frac{h}{3}, \quad y_T = z_T = 0$$

**KVÁDER**



**Momenty zotrvačnosti**

$$I_x = \frac{m}{12} (b^2 + d^2), \quad I_y = \frac{m}{12} (a^2 + d^2), \quad I_z = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$$

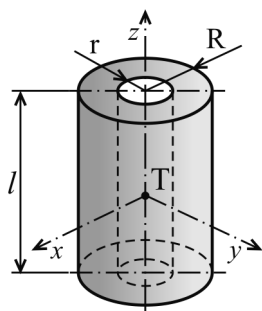
**Súradnice ťažiska**

$$x_T = \frac{a}{2}, \quad y_T = \frac{b}{2}, \quad z_T = \frac{d}{2}$$

**Objem**

$$V = abd$$

**VALEC**



**Momenty zotrvačnosti**

$$I_x = I_y = \frac{m}{4} (R^2 - r^2) + \frac{m}{12} l^2, \quad I_z = \frac{m}{2} (R^2 + r^2)$$

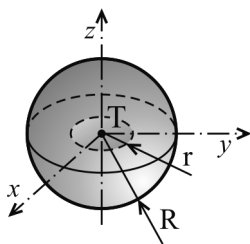
**Súradnice ťažiska**

$$x_T = y_T = 0, \quad z_T = \frac{l}{2}$$

**Objem**

$$V = \pi l (R^2 - r^2)$$

**GULA**



**Momenty zotrvačnosti**

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$$

**Súradnice ťažiska**

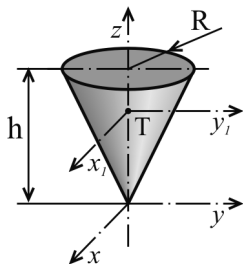
$$x_T = y_T = z_T = 0$$

**Objem**

$$V = \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3)$$

Tabuľka 4.1 (pokračovanie)

**KUŽEL**



**Momenty zotrvačnosti**

$$I_x = I_y = \frac{3}{5} m \left( h^2 + \frac{R^2}{4} \right), \quad I_z = \frac{3}{10} m R^2$$

$$I_{x_1} = I_{y_1} = \frac{3}{80} m (4R^2 + h^2)$$

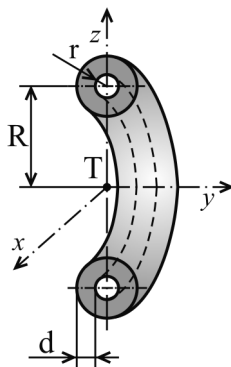
**Súradnice ťažiska**

$$x_T = y_T = 0, \quad z_T = \frac{3}{4} h$$

**Objem**

$$V = \frac{\pi}{3} R^2 h$$

**DUTÝ TOROID**



**Momenty zotrvačnosti**

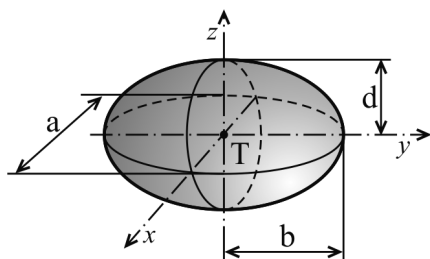
$$I_x = I_z = \frac{m}{2} \left[ R^2 + \frac{5}{4} \frac{2r^2(2r-3d) + d^2(4r-d)}{2r-d} \right]$$

$$I_y = m \left[ R^2 + \frac{3}{4} \frac{2r^2(2r-3d) + d^2(4r-d)}{2r-d} \right]$$

**Objem**

$$V = 2\pi^2 R d (2r - d)$$

**ELIPSOID**



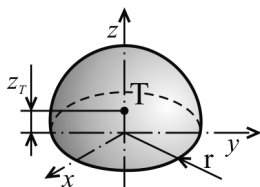
**Momenty zotrvačnosti**

$$I_x = \frac{m}{5} (b^2 + d^2), \quad I_y = \frac{m}{5} (a^2 + d^2), \quad I_z = \frac{m}{5} (a^2 + b^2)$$

**Objem**

$$V = \frac{4}{3} \pi a b d$$

**POLGULE**



**Momenty zotrvačnosti**

$$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} m r^2$$

**Súradnice ťažiska**

$$x_T = y_T = 0, \quad z_T = \frac{3}{8} r$$

**Objem**

$$V = \frac{2}{3} \pi R^3$$



## 5 POSUVNÝ A ROTAČNÝ POHYB TELESA

### 5.1 Posuvný pohyb telesa

Pri posuvnom pohybe telesa spojnice jeho dvoch ľubovoľných bodov nemajú smer. Všetky body telesa majú rovnaké rýchlosti a zrýchlenia a ich dráhy sú zhodné, navzájom posunuté krivky.

Hybnosť telesa je určená vzťahom

$$\mathbf{H} = m\mathbf{v}_T,$$

kde  $m$  je hmotnosť sústredená v ťažisku telesa,

$\mathbf{H}$  hybnosť telesa,

$\mathbf{v}_T$  rýchlosť telesa.

Moment hybnosti telesa k určitému bodu je

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_T \times m\mathbf{v}_T.$$

Kinetická energia telesa je určená kinetickou energiou hmoty telesa sústredenej v ťažisku telesa

$$E_K = \frac{1}{2}mv_T^2.$$

Dynamické pohybové rovnice majú tvar

$$m\mathbf{a}_T = \mathbf{F},$$

$$\mathbf{r}_T \times m\mathbf{a}_T = \mathbf{M}_0,$$

kde  $\mathbf{F} = \sum \mathbf{F}_i$  je výslednica vonkajších síl pôsobiacich na teleso,

$\mathbf{M}_0 = \sum \mathbf{M}_{i0} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$  je moment vonkajších síl k vzťažnému bodu.

Ak je vzťažným bodom ťažisko alebo bod ležiaci na nositeľke vektora zrýchlenia ťažiska, potom platí  $\mathbf{0} = \mathbf{M}_0$ .

Teda pre posuvný pohyb telesa môžeme písať dynamické pohybové rovnice v tvare

$$m\ddot{x} = \sum F_{ix},$$

$$m\ddot{y} = \sum F_{iy},$$

$$m\ddot{z} = \sum F_{iz},$$

kde  $\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}$  sú zložky zrýchlenia ťažiska,

$\sum F_{ix}, \sum F_{iy}, \sum F_{iz}$  sú čiastkové výslednice vonkajších síl pôsobiacich na teleso.

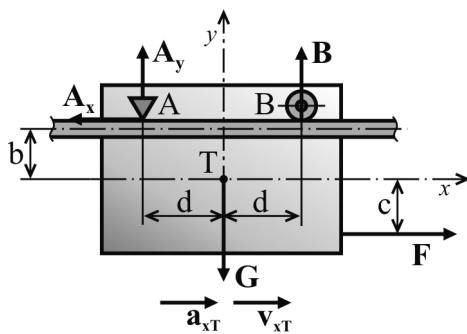
Pokiaľ nepotrebuje počítat väzbové reakcie, posuvný pohyb telesa môžeme riešiť ako pohyb hmotného bodu. To znamená, že hmota telesa je sústredená do jeho ťažiska a môžeme počítat dráhu, rýchlosť, zrýchlenie, kinetickú energiu, moment hybnosti, výslednú zotrvačnú silu.

### 5.1.1 Príklady (Posuvný pohyb telesa)

#### Príklad 5.1

Horizontálna sila  $F$  pôsobí na kľučku zasúvacích dverí. Určte reakcie vo vedení, v koliesku a zrýchlenie, akým sa dvere pohybujú. Medzi podperou  $A$  (šmykadlo) a vedením je koeficient šmykového trenia  $f$ , pasívne odpory v ložisku kolieska  $B$  a jeho hmotnosť zanedbajte.

Dané hodnoty:  $F = 100 \text{ N}$ ,  $b = 120 \text{ cm}$ ,  $c = 70 \text{ cm}$ ,  $d = 60 \text{ cm}$ ,  $G = 800 \text{ N}$ ,  $f = 0,1$



Obr. 5.1

#### 1. Uvoľnenie

Reakciu vedenia v mieste šmykadla  $A$  rozložíme na zložky  $A_x$ ,  $A_y$ . Reakcia vedenia pri koliesku  $B$  je len normálová. Tiaž dverí  $G$  pôsobí v ich ťažisku. Pohyb dverí riešime ako posuvný priamočiary pohyb telesa so zrýchlením jeho ťažiska  $a_{xT}$ , ktorého smer a orientáciu poznáme.

#### 2. Dynamické pohybové rovnice

$$x \dots m a_{xT} = \sum F_{ix}, \quad (1)$$

$$y \dots m a_{yT} = \sum F_{iy}, \quad (2)$$

$$(\quad)_T \dots I \alpha = \sum (M_i)_T. \quad (3)$$

Keďže dvere vykonávajú priamočiary posuvný pohyb, potom  $\alpha = 0$ , to znamená, že rovnica (3) bude statickou (momentovou) podmienkou rovnováhy.

Potom

$$x \dots ma_{xT} = -A_x + F, \quad (1)$$

$$y \dots m \cdot 0 = B + A_y - G, \quad (2)$$

$$(\dots)_T \dots 0 = Fc + Bd - A_y d + A_x b. \quad (3)$$

V týchto troch dynamických pohybových rovniciach sú ale 4 neznáme ( $A_x, A_y, B, a_{xT}$ ), hľadáme preto ďalší vzťah. Daný je koeficient šmykového trenia, teda podľa Coulombovho vzťahu platí

$$A_x = fA_y. \quad (4)$$

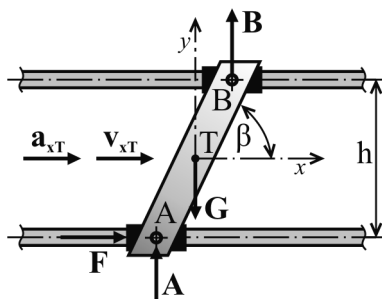
Potom zo sústavy štyroch rovníc vieme vypočítať štyri neznáme

$$A_x = 50,9 \text{ N}, \quad A_y = 509 \text{ N}, \quad B = 290,7 \text{ N}, \quad a_{xT} = 0,601 \text{ ms}^{-2}.$$

### **Príklad 5.2**

Spojovacie tiahlo  $AB$  o tiaži  $G$  je kĺbmi uchytené k dvom prstencom zanedbateľnej hmotnosti, ktoré sa kĺžu po hladkých horizontálnych vedeniach. Určte, akým zrýchlením sa tiahlo  $AB$  bude pohybovať a aké sú reakcie vo vedení  $AB$ , ak v mieste  $A$  začne pôsobiť horizontálna sila  $F$ .

Dané hodnoty:  $G = 200 \text{ N}$ ,  $F = 100 \text{ N}$ ,  $h = 70 \text{ cm}$ ,  $\beta = 60^\circ$



Obr. 5.2

#### 1. Uvoľnenie

V ťažisku tiahla pôsobí sila jeho tiaže  $G$  a namiesto vedení  $A, B$  zakreslíme normálové zložky ich reakcií. Tiahlo sa pohybuje ako teleso v rovine posuvným zrýchlením, priamočiarym pohybom.

#### 2. Dynamické pohybové rovnice

$$x \dots ma_{xT} = \sum F_{ix}, \quad (1)$$

$$y \dots ma_{yT} = \sum F_{iy} = 0, \quad (2)$$

$$(\quad)_T \dots I\alpha = \sum (M_i)_T = 0, \quad (3)$$

pretože pri priamočiarom posuvnom pohybe je  $\alpha = 0$ .

Potom

$$x \dots ma_{xT} = F, \quad (1)$$

$$y \dots 0 = A + B - G, \quad (2)$$

$$(\quad)_T \dots 0 = \frac{Fh}{2} + \frac{Bh}{2\operatorname{tg}\beta} - \frac{Ah}{2\operatorname{tg}\beta}. \quad (3)$$

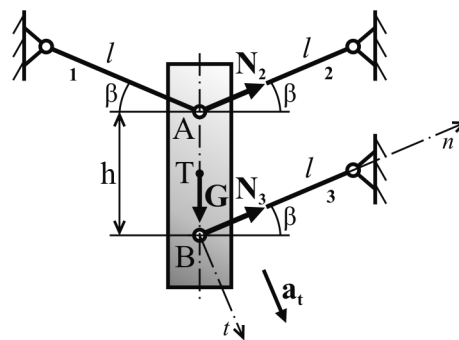
Z troch rovníc o troch neznámych  $(A, B, a_{xT})$  sa dajú vypočítať:

$$a_{xT} = 4,9 \text{ ms}^{-2}, \quad A = 186,6 \text{ N}, \quad B = 13,39 \text{ N}.$$

### **Príklad 5.3**

Tuhá tyč  $AB$  o tiaži  $G$  je uchytená k rámu tromi prútmi. Vypočítajte zrýchlenie tyče a sily v prútoch 2,3 v okamihu presekutia prúta 1.

Dané hodnoty:  $G = 500 \text{ N}$ ,  $\beta = 30^\circ$



Obr. 5.3

#### 1. Uvoľnenie

V ťažisku tyče  $AB$  pôsobí sila jej vlastnej tiaže  $G$ . Po presekutí prúta 1 sa tyč pohybuje vedená prútmi 2,3 v rovine, krivočiarno, posuvne, zrýchlene. Zvolíme prirodzený súradnicový systém s osami v smere dotýčnice ( $t$ ) a normály ( $n$ ) k trajektórii pohybu ťažiska (a všetkých bodov tyče  $AB$ ).

#### 2. Dynamické pohybové rovnice

$$t \dots ma_t = \sum F_{it}, \quad (1)$$

$$n \dots ma_n = \sum F_{in}, \quad (2)$$

$$(\quad)_T \dots I\alpha = \sum (M_i)_T, \quad (3)$$

kde  $a_t, a_n$  je tangenciálna a normálová zložka zrýchlenia. Pretože v okamihu preseknutia prúta 1 je  $\omega = 0$ , potom normálová zložka zrýchlenia

$$a_n = \frac{v^2}{l} = 0.$$

Potom DPR budú

$$t \dots m a_t = G \cos \beta, \quad (1)$$

$$n \dots 0 = N_2 + N_3 - G \sin \beta, \quad (2)$$

$$( )_T \dots 0 = -N_2 \cos \beta \frac{h}{2} + N_3 \cos \beta \frac{h}{2}, \quad (3)$$

odkiaľ vieme vypočítať

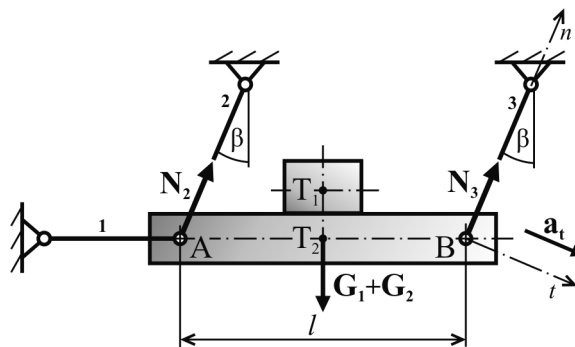
$$N_2 = N_3 = 125 \text{ N}, \quad a_t = 8,5 \text{ ms}^{-2}.$$

#### **Príklad 5.4**

Bremeno o tiaži  $G_1$ , ktoré môžeme považovať za hmotný bod, je umiestnené na doske o tiaži  $G_2$ , ktorá je uchytená k rámu tromi prútmi. Vypočítajte zrýchlenie bremena a dosky v okamihu preseknutia prúta 1. Uvažujte prípady:

- pevné spojenie bremena a dosky,
- medzi bremenom a doskou je koeficient šmykového trenia  $f$ .

Dané hodnoty:  $G_1 = 500 \text{ N}$ ,  $G_2 = 100 \text{ N}$ ,  $l = 1,5 \text{ m}$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $f = 0,2$



Obr. 5.4

#### **a) Pevné spojenie bremena a dosky**

##### **1. Uvoľnenie**

Tiaže bremena ( $G_1$ ) a dosky ( $G_2$ ) pôsobia v ich ťažiskách. V prútoch 2, 3 pôsobia reakcie (osové sily)  $N_2$ ,  $N_3$ . Bremeno a doska sú pevne spojené, tvoria jedno teleso, ktoré sa po preseknutí prúta 1 pohybuje v zavesení na prútoch 2, 3, to znamená, že sa pohybuje

rovinne, krivočiarno, posuvným zrýchleným pohybom. Volíme prirodzený súradnicový systém, ktorého osi sú v smere dotýčnice ( $t$ ) a normály ( $n$ ) k trajektórii pohybu.

## 2. Dynamické pohybové rovnice

$$t \dots ma_t = \sum F_{it}, \quad (1)$$

$$n \dots ma_n = \sum F_{in}, \quad (2)$$

$$(\dots)_T \dots I\alpha = \sum (M_i)_T. \quad (3)$$

V okamihu presekutia prúta 1 je uhlová rýchlosť  $\omega = 0$ , teda  $a_n = 0$  a  $M = 0$ , potom

$$t \dots ma_t = (G_1 + G_2) \sin \beta, \quad (1)$$

$$n \dots 0 = -(G_1 + G_2) \cos \beta + N_2 + N_3, \quad (2)$$

$$(\dots)_T \dots 0 = N_3 \cos \beta \frac{l}{2} - N_2 \cos \beta \frac{l}{2}, \quad (3)$$

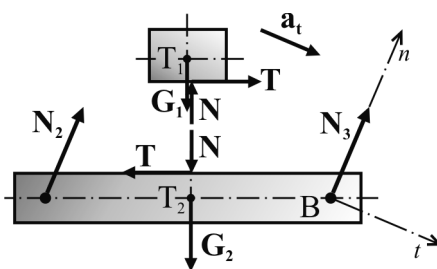
odkiaľ vypočítame

$$a_t = 4,9 \text{ ms}^{-2}, \quad N_2 = N_3 = 259,8 \text{ N}.$$

## b) Medzi bremenom a doskou je možný pohyb, koeficient šmykového trenia je $f$

### 1. Uvoľnenie

V ťažiskách bremena a dosky pôsobia sily ich tiaží, medzi bremenom a doskou je šmyková reakcia, ktorú rozložíme na tangenciálnu ( $T$ ) a normálovú zložku ( $N$ ) a rešpektujeme zákon akcie a reakcie. Bremeno s doskou sa nerozdeľujú, pohybujú sa spoločne, ako jedno teleso, v rovine, posuvne, krivočiarno, zrýchlene. Volíme prirodzený súradnicový systém s osami v smere dotýčnice a normály k trajektórii.



Obr. 5.5

### 2. Dynamické pohybové rovnice bremena:

$$t \dots m_1 a_t = G_1 \sin \beta - N \sin \beta + T \cos \beta, \quad (1)$$

$$n \dots 0 = -G_1 \cos \beta + N \cos \beta + T \sin \beta, \quad (2)$$

pretože  $\omega = 0$ , normálová zložka zrýchlenia  $a_n = 0$ .

V rovniciach (1), (2) sú tri neznáme ( $N, T, a_t$ ), preto použijeme Coulombov vzťah

$$T = fN. \quad (3)$$

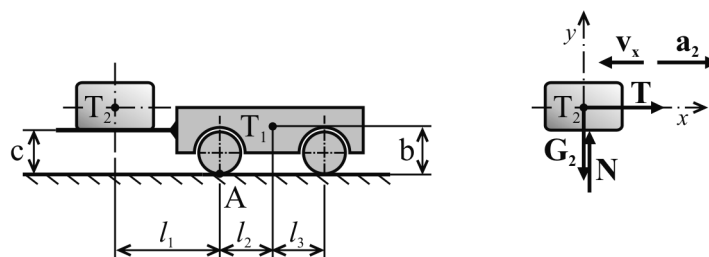
Potom vieme vypočítať

$$N = 448 \text{ N}, \quad T = 89,6 \text{ N}, \quad a_t = 2,03 \text{ ms}^{-2}.$$

### **Príklad 5.5**

Vysokozdvíhny vozík o tiaži  $G_1$  sa pohybuje rýchlosťou  $v$ . Vezie náklad o tiaži  $G_2$ . Vypočítajte najkratšiu brzdnú dráhu vozíka (všetkými kolesami) tak, aby sa náklad nezošmykol a vozík sa nepreklopil. Koeficient šmykového trenia medzi vozíkom a nákladom je  $f_1$ , medzi cestou a vozíkom  $f_2$ .

Dané hodnoty:  $G_1 = 7,5 \cdot 10^4 \text{ N}$ ,  $G_2 = 10^4 \text{ N}$ ,  $f_1 = 0,2$ ;  $f_2 = 0,4$ ;  $l_1 = 1,5 \text{ m}$ ,  $l_2 = 1 \text{ m}$ ,  $l_3 = 1,5 \text{ m}$ ,  $b = 0,75 \text{ m}$ ,  $c = 0,4 \text{ m}$ ,  $v = 15 \text{ km/hod}$



Obr. 5.6

#### **a) Aby sa náklad nezošmykol**

##### **1. Uvoľnenie**

Zakreslíme sily pôsobiace na náklad. V jeho ťažisku ( $T_2$ ) pôsobí sila tiaže  $G_2$ , zložky šmykovej reakcie ramena vozíka ( $T, N$ ). Náklad sa spolu s vozíkom pohybuje v rovine, posuvne, priamočiaro, zrýchlene (obr. 5.6). Sily tvoria centrálnu rovinnú silovú sústavu, takže sa pohybuje hmotný bod. Neuvažujeme teraz s možnosťou preklopenia samotného nákladu.

##### **2. Dynamické pohybové rovnice**

$$x \dots m_2 a_2 = \sum F_{ix}, \quad (1)$$

$$y \dots m_2 a_y = \sum F_{iy}, \quad (2)$$

pretože sa vozík (aj s nákladom) pohybuje len v smere osi  $x$ , potom  $a_y = 0$ , teda

$$x \dots m_2 a_2 = T, \quad (1)$$

$$y \dots 0 = N - G_2. \quad (2)$$

V týchto dvoch rovniciach sú tri neznáme, preto využijeme Coulombov vzťah

$$T = f_1 N. \quad (3)$$

Zo sústavy rovníc (1), (2), (3) vieme vypočítať tri neznáme.

Podmienkou, aby sa náklad nezošmykol je, aby platilo

$$T \geq m_2 a_2, \\ f_1 G_2 \geq m_2 a_2,$$

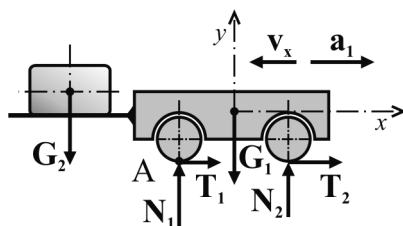
odkiaľ

$$a_2 \leq f_1 g, \\ a_2 \leq 1,92 \text{ ms}^{-2}.$$

b) Aby sa vozík nepreklopil (okolo bodu A)

#### 1. Uvoľnenie

V ťažiskách bremena a vozíka pôsobia sily ich tiaží ( $G_1, G_2$ ) reakcie podložky pod kolesami rozložené na tangenciálne ( $T_1, T_2$ ) a normálové zložky ( $N_1, N_2$ ). Vozík ako teleso v rovine sa pohybuje posuvne, priamočiaro, zrýchlene.



Obr. 5.7

#### 2. Dynamické pohybové rovnice

$$x \dots m a_1 = \sum F_{ix}, \quad (1)$$

$$y \dots m a_y = \sum F_{iy} = 0, \quad (2)$$

$$(\quad)_T \dots I \alpha = \sum (M_i)_A. \quad (3)$$

Vozík sa pohybuje priamočiaro v smere osi  $x$ , takže zložka zrýchlenia  $a_y = 0$ ,  $0 = M$ , potom

$$x \dots m a_1 = T_1 + T_2, \quad (1)$$

$$y \dots 0 = N_1 + N_2 - G_1 - G_2, \quad (2)$$

$$(\quad)_T \dots 0 = G_2 l_1 + N_2 (l_2 + l_3) - G_1 l_2. \quad (3)$$

V týchto troch rovniciach je päť neznámych ( $T_1, T_2, N_1, N_2, a_2$ ), preto využijeme Coulombov vzťah



$$T_1 = f_2 N_1, \quad (4)$$

$$T_2 = f_2 N_2. \quad (5)$$

Zo sústavy rovníc potom vypočítame

$$a_1 = 3,924 \text{ ms}^{-2}.$$

Podmienkou, aby sa náklad nezošmykol a vozík nepreklopil je, aby jeho zrýchlenie (spomalenie) pri brzdení  $a_{\max} \leq \min(a_1, a_2)$ , teda

$$a_{\max} \leq a_2 \leq 1,96 \text{ ms}^{-2}.$$

Najkratšiu brzdnú dráhu potom určíme zo vzťahu  $a = \frac{dv}{dt}$ , odkiaľ

$$s \geq \frac{a_2 t^2}{2} \geq \frac{v^2}{2a_2} \geq 4,42 \text{ m}.$$

## 5.2 Rotačný pohyb telesa (okolo stálej osi rotácie)

Rotačný pohyb telesa alebo otáčavý pohyb telesa okolo stálej osi otáčania. Ak sú dva body telesa v danom časovom intervale v pokoji, ich spojnicu nazývame stálou osou otáčania (rotácie). Všetky body telesa sa pohybujú po kružniciach, ktorých roviny sú kolmé na os otáčania a ich stredy ležia na osi otáčania.

Moment hybnosti rotujúceho telesa k osi rotácie je určený vzťahom

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega},$$

kde  $I$  je moment zotrvačnosti telesa k osi rotácie,

$\boldsymbol{\omega}$  je okamžitá uhlová rýchlosť.

Časová zmena momentu hybnosti

$$I\alpha = \sum \mathbf{M}_i = \mathbf{M}$$

je vlastne dynamickou pohybovou rovnicou.

Kinetická energia rotujúceho telesa je určená vzťahom

$$E_K = \frac{1}{2} I\omega^2.$$

Ak dáme do rovnováhy vonkajšie sily (resp. vonkajšie momenty) pôsobiace na teleso so zotrvačnými silami

$$\sum \mathbf{F}_i + \mathbf{F} = \mathbf{0}, \text{ resp. } \sum \mathbf{M}_i + \mathbf{M} = \mathbf{0},$$

kde  $\mathbf{F}$  je zotrvačná sila,

$\mathbf{M}$  zotrvačný moment.

Ak stotožníme začiatok súradnicovej sústavy s ťažiskom telesa tak, že os  $z$  bude osou rotácie, potom skalárnym násobením týchto veličín jednotkovými vektormi dostaneme šesť rovnovážnych zložkových rovníc (pre každý stupeň voľnosti pohybu jednu):

$$\begin{aligned} F_x + \omega^2 m x_T + \alpha m y_T &= 0, \\ F_y + \omega^2 m y_T - \alpha m x_T &= 0, \\ F_z &= 0, \\ M_x - \omega^2 D_{yz} + \alpha D_{xz} &= 0, \\ M_y + \omega^2 D_{xz} + \alpha D_{yz} &= 0, \\ M_z - \alpha I_z &= 0. \end{aligned}$$

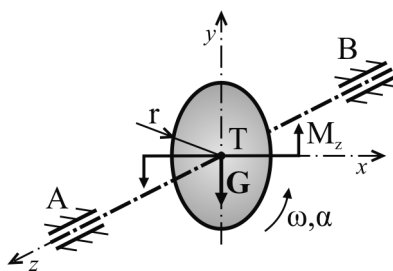
Z týchto rovníc sa dajú vypočítať dynamické reakcie rotujúceho telesa okolo stálej osi rotácie.

### 5.2.1 Príklady (Rotačný pohyb telesa)

#### Príklad 5.6

Tenký plný disk o hmotnosti  $m$  a polomere  $r$  je uchytený na hriadeľi, ktorého hmotnosť zanedbáme. Hriadeľ je uložený v radiálnych ložiskách  $A, B$ . Disk sa otáča pod vplyvom momentu  $M_z$  okolo osi  $z$ , ktorá prechádza ťažiskom disku a je kolmá na rovinu disku. Jeho otáčanie je určené parametrickou rovnicou  $\varphi = 5t^2$ . Vypočítajte veľkosť momentu  $M_z$ . Pasívne odpory zanedbajte.

Dané hodnoty:  $m = 30 \text{ kg}$ ,  $r = 20 \text{ cm}$



Obr. 5.8

#### 1. Uvoľnenie

V ťažisku disku pôsobí sila jeho tiaže  $G$ , v rovine disku moment  $M_z$ , ktorý ním otáča, ostatné sily (pasívne odpory, reakcie v ložiskách) neuvažujeme. Pôsobiacie silové

účinky tvoria všeobecnú silovú sústavu, takže disk budeme považovať za teleso, ktoré koná rotačný pohyb okolo nepohyblivej (stálej) osi rotácie  $z$ , zrýchlene.

2. Dynamická pohybová rovnica

$$\left( \right)_z \dots \alpha_z I_z = \sum (M_i)_z, \quad (1)$$

Pre plný tenký disk je moment zotrvačnosti k osi, ktorá prechádza ťažiskom disku kolmo na rovinu disku, daný vzťahom

$$I_z = \frac{mr^2}{2}. \quad (2)$$

Uhlové zrýchlenie vieme určiť dvojnásobnou deriváciou parametrickej rovnice  $\varphi = 5t^2$  podľa času, teda  $\ddot{\varphi} = \alpha = 10 \text{ rad s}^{-2}$ .

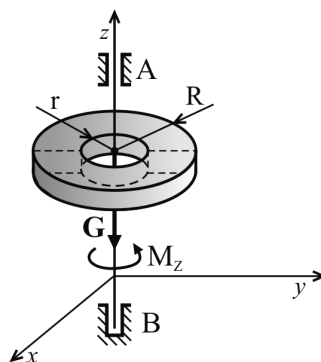
Potom po dosadení do rovnice (1) bude

$$M_z = \frac{mr^2}{2} \ddot{\varphi} = 6 \text{ Nm}.$$

### **Príklad 5.7**

Ťažký zotrvačník o vonkajšom polomere  $R$  a vnútornom polomere  $r$  je tuho spojený s hriadeľom, ktorého hmotnosť zanedbáme. Hriadeľ je uložený v radiálnom (A) a axiálnoradiálnom (B) ložisku, ktorých pasívne odpory zanedbáme. Vypočítajte veľkosť momentu  $M_z$ , ktorý zotrvačníkom otáča tak, aby jeho rotácia bola určená parametrickou rovnicou  $\varphi = 8t^2$ .

Dané hodnoty:  $G = 4 \cdot 10^3 \text{ N}$ ,  $R = 0,9 \text{ m}$ ,  $r = 0,7 \text{ m}$



**Obr. 5.9**

1. Uvoľnenie

Sila tiaže zotrvačníka pôsobí v jeho ťažisku. Moment  $M_z$  otáča zotrvačníkom okolo osi  $z$  prechádzajúcej jeho ťažiskom. Keďže pasívne odpory v ložiskách zanedbávame, iné

sily nekreslíme. Zotrvačník predstavuje teleso, ktoré sa otáča okolo stálej osi otáčania  $z$  zrýchlene.

2. Dynamická pohybová rovnica – pri pohybe okolo osi  $z$  bude

$$z \dots I_z \alpha_z = \sum (M_i)_z. \quad (1)$$

Pre zotrvačník tvaru medzikružia je moment zotrvačnosti k osi  $z$ , ktorá prechádza jeho ťažiskom kolmo na rovinu zotrvačníka, daný vzťahom

$$I_z = \frac{m(R^2 + r^2)}{2} = \frac{G(R^2 + r^2)}{2g}. \quad (2)$$

Z parametrickej rovnice dvojnásobnou deriváciou podľa času dostaneme

$$\ddot{\varphi} = 16 \text{ rads}^{-2}. \quad (3)$$

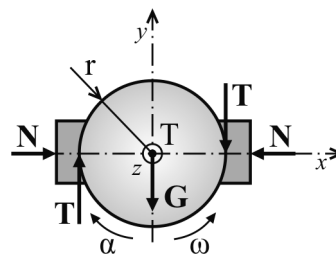
Potom po dosadení do rovnice (1) bude

$$M_z = 4,24 \cdot 10^3 \text{ Nm}.$$

### **Príklad 5.8**

Plochý plný rotor o tiaži  $G$  sa na začiatku časového intervalu otáča otáčkami  $n_0$ . Vypočítajte veľkosť prítláčnej sily brzdových čeľustí, aby sa otáčanie rotora zastavilo za čas  $t_1$  od začiatku brzdenia. Koeficient šmykového trenia medzi rotorom a čeľusťami je  $f$ .

Dané hodnoty:  $G = 3000 \text{ N}$ ,  $n_0 = 2500 \text{ min}^{-1}$ ,  $R = 0,3 \text{ m}$ ,  $f = 0,2$ ;  $t_1 = 6 \text{ s}$



Obr. 5.10

1. Uvoľnenie

Sila tiaže rotora  $G$  pôsobí v jeho ťažisku. Brzdná sila čeľustí je rozložená na tangenciálnu ( $T$  - pôsobí proti orientácii pohybu) a normálovú ( $N$ ) zložku. Rotor predstavuje teleso otáčajúce sa okolo stálej osi otáčania  $z$ , zrýchlene (v tomto prípade ide o spomalený pohyb).

2. Dynamická pohybová rovnica – pri rotácii okolo osi  $z$  bude

$$I_z \alpha_z = \sum (M_i)_z \quad (1)$$

Pre plochý rotor moment zotrvačnosti k osi  $z$ , ktorá prechádza jeho ťažiskom a je kolmá na rovinu rotora, je

$$I_z = \frac{mR^2}{2} = \frac{GR^2}{2g}. \quad (2)$$

Zo vzťahu pre rovnomerne zrýchlený rotačný pohyb

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \text{konšt.},$$

odkiaľ po úprave dostávame

$$\alpha = -\frac{\omega_0}{t} = -\frac{\pi n_0}{30t_1}. \quad (3)$$

Po dosadení rovníc (2), (3) do rovnice (1) bude mať dynamická pohybová rovnica tvar

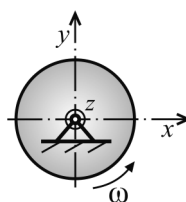
$$\frac{GR^2}{2g} \left( -\frac{\pi n_0}{30t_1} \right) = -2fNR.$$

Po vyčíslení je prítláčná sila brzdových čeľustí  $N = 5003,8 \text{ N}$ .

### **Príklad 5.9**

Otáčanie plného plochého disku okolo stálej osi otáčania  $z$  je určené parametrickou rovnicou  $\varphi = t^3$ . Určte moment, ktorý diskom otáča v čase  $t_1$ .

Dané hodnoty:  $I_z = 2 \text{ kgm}^2$ ,  $\varphi = t^3$ ,  $t_1 = 1 \text{ s}$



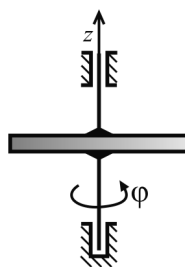
**Obr. 5.11**

(12 Nm)

### **Príklad 5.10**

Vypočítajte veľkosť momentu  $M_z$ , ktorý otáča hriadeľom pevne spojeným s diskom podľa parametrickej rovnice  $\varphi = 3t^2 - t$ .

Dané hodnoty:  $\varphi = 3t^2 - t$ ,  $I_z = \frac{1}{6} \text{ kgm}^2$  (moment zotrvačnosti hriadeľa s diskom)



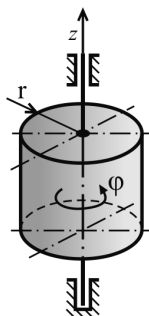
Obr. 5.12

(1 Nm)

### **Príklad 5.11**

Vypočítajte veľkosť momentu  $M_z$ , ktorý roztáča homogénny valec o hmotnosti  $m$ , polomeru  $r$  tak, že jeho rotácia je určená parametrickou rovnicou  $\varphi = t^3 - 5t^2$ . Moment počítajte v čase  $t_1 = 2\text{s}$ .

Dané hodnoty:  $m = 60\text{ kg}$ ,  $r = 1,41\text{ m}$ ,  $\varphi = t^3 - 5t^2$ ,  $t_1 = 2\text{s}$



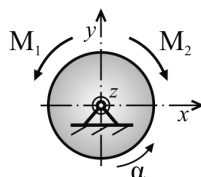
Obr. 5.13

(119 Nm)

### **Príklad 5.12**

Plochý plný disk sa otáča s uhlovým zrýchlením  $\alpha$  okolo stálej osi otáčania  $z$ . Pôsobí na neho moment  $M_1$  a odpor proti pohybu vyjadrený momentom  $M_2$ . Vypočítajte veľkosť momentu  $M_1$ , ak moment zotrvačnosti disku je  $I_z$ .

Dané hodnoty:  $\alpha = 4\text{ rads}^{-2}$ ,  $M_2 = 6\text{ Nm}$ ,  $I_z = 6\text{ kgm}^2$



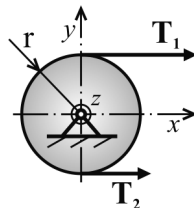
Obr. 5.14

(30 Nm)

### **Príklad 5.13**

Vypočítajte uhlové zrýchlenie pri rotácii plného plochého disku okolo stálej osi rotácie  $z$ , ak príčinou jeho rotačného pohybu je výsledný momentový účinok tangenciálnych síl  $T_1$ ,  $T_2$  na obvode disku. Disk má hmotnosť  $m$ , polomer  $r$ , moment zotrvačnosti k osi  $z$   $I_z$ .

Dané hodnoty:  $m = 50 \text{ kg}$ ,  $r = 0,3 \text{ m}$ ,  $T_1 = 2T_2 = 100 \text{ N}$ ,  $I_z = 2 \text{ kgm}^2$



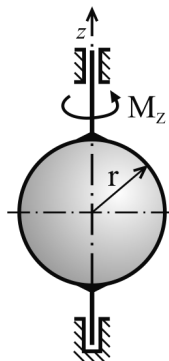
**Obr. 5.15**

(7,5 rad s<sup>-2</sup>)

### **Príklad 5.14**

Plný tenký disk sa vplyvom momentu  $M_z$  otáča okolo stálej osi rotácie  $z$ , ktorá leží v rovine disku a prechádza jeho ťažiskom. Vypočítajte uhlové zrýchlenie otáčania disku.

Dané hodnoty:  $m = 4 \text{ kg}$ ,  $r = 0,6 \text{ m}$ ,  $M_z = 1,8 \text{ Nm}$



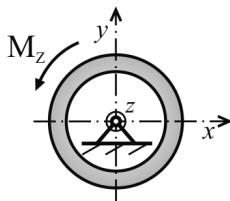
**Obr. 5.16**

(1,8 Nm)

### **Príklad 5.15**

Vypočítajte uhlovú rýchlosť zotrvačníka tvaru medzikružia o hmotnosti  $m$  v čase  $t_1$  od začiatku jeho rotácie okolo stálej osi  $z$ , ak na zotrvačník pôsobí moment  $M_z$  a jeho moment zotrvačnosti je  $I_z$ .

Dané hodnoty:  $m = 12 \text{ kg}$ ,  $I_z = 35,91 \text{ kgm}^2$ ,  $t_1 = 3 \text{ s}$ ,  $M_z = 6 \text{ Nm}$



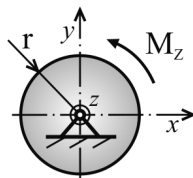
Obr. 5.17

$(0,501 \text{ rads}^{-1})$

### **Príklad 5.16**

Homogénny plný disk o hmotnosti  $m$ , polomere  $r$  sa otáča okolo stálej osi otáčania  $z$  pod vplyvom momentu  $M_z$ . Vypočítajte jeho uhlové zrýchlenie v čase  $t_1$ , ak jeho začiatočná uhlová rýchlosť je  $\omega_0$ .

Dané hodnoty:  $m = 80 \text{ kg}$ ,  $r = 0,5 \text{ m}$ ,  $M = 20 \text{ t}^2$ ,  $t_1 = 6 \text{ s}$ ,  $\omega_0 = 0 \text{ rads}^{-1}$



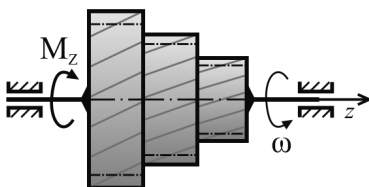
Obr. 5.18

$(144 \text{ rads}^{-1})$

### **Príklad 5.17**

Vypočítajte moment zotrvačnosti skupiny ozubených kolies na spoločnom hriadeľi, ktorým prechádza stála os rotácie  $z$ . Kolesá sa otáčajú spomalene pod vplyvom brzdiaceho momentu  $M_z$ , pričom k ich úplnému zastaveniu dôjde v čase  $t_1$ . Na začiatku mali uhlovú rýchlosť  $\omega_0$ .

Dané hodnoty:  $M_z = 8\pi \text{ Nm}$ ,  $t_1 = 6 \text{ s}$ ,  $\omega_0 = 12\pi \text{ rads}^{-1}$



Obr. 5.19

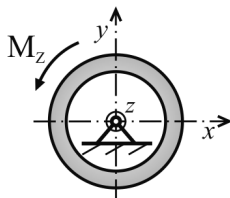
$(4 \text{ kgm}^2)$



### **Príklad 5.18**

Vypočítajte uhol, o ktorý sa za čas  $t_1$  pootočí zotrvačník o hmotnosti  $m$  a tvaru medzikružia, ak sa začne otáčať z pokoja pod vplyvom momentu  $M_z$ .

Dané hodnoty:  $t_1 = 1$  s,  $m = 1,5$  kg,  $I_z = 0,015$  kgm<sup>2</sup>,  $M_z = 0,15$  Nm

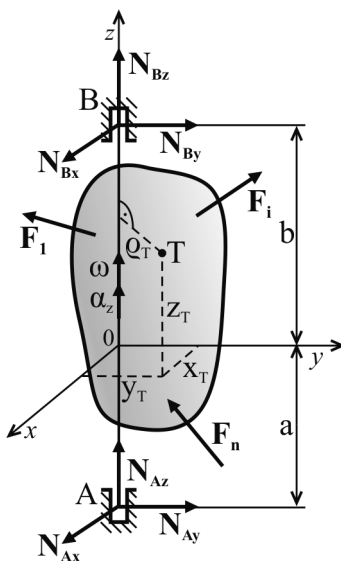


Obr. 5.20

(5 rad)

### **5.3 Dynamické reakcie pri rotačnom pohybe telesa**

Teleso uložené v radiálno-axiálnych ložiskách  $A, B$  sa otáča okolo stálej osi rotácie  $z$ . Súradnice jeho ťažisko  $T$  sú  $x_T, y_T, z_T$ .



Obr. 5.21

Výsledný vektor zotrvačných síl  $\mathbf{V}$  má zložky:

$$V_x = mx_T \omega^2 + my_T \alpha_z, \quad (1)$$

$$V_y = my_T \omega^2 - mx_T \alpha_z, \quad (2)$$

$$V_z = 0. \quad (3)$$

Výsledný vektor momentu zotrvačných síl  $\mathbf{M}$  má zložky:

$$M_x = -D_{yz}\omega^2 + D_{xz}\alpha_z, \quad (4)$$

$$M_y = D_{xz}\omega^2 + D_{yz}\alpha_z, \quad (5)$$

$$M_z = -I_z\alpha_z. \quad (6)$$

Veľkosť výsledného vektora zotrvačných síl je

$$V = m\rho_T\sqrt{\alpha^2 + \omega^4}, \quad \rho_T = \sqrt{x_T^2 + y_T^2}.$$

Veľkosť výsledného momentu zotrvačných účinkov je

$$M_o = \sqrt{D_{xz}^2 + D_{yz}^2}\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Ak os rotácie je zároveň hlavnou osou, potom

$$D_{xz} = D_{yz} = 0.$$

Aby zotrvačné účinky boli nulové, t.j.  $\mathbf{V} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ , potom os rotácie musí byť hlavnou a centrálnou osou ( $\rho_T = 0$ ,  $D_{yz} = 0$ ,  $D_{xz} = 0$ ). Zložky väzbových síl vyvolané zotrvačnými účinkami sú v tomto prípade nulové ( $N'_{Ax} = N'_{Ay} = N'_{Bx} = N'_{By} = 0$ ). Reakcie vo väzbách sú len od statického zaťaženia.

Ak uvažujeme len so zaťažením od zotrvačných účinkov, potom dynamické pohybové rovnice, sú:

$$N'_{Ax} + N'_{Bx} = mx_T\omega^2 + my_T\alpha_z,$$

$$N'_{Ay} + N'_{By} = my_T\omega^2 - mx_T\alpha_z,$$

$$N'_{Az} + N'_{Bz} = 0,$$

$$N'_{Ay}a - N'_{By}b = -D_{yz}\omega^2 + D_{yz}\alpha_z,$$

$$-N'_{Ax}a - N'_{Bx}b = D_{xz}\omega^2 + D_{xz}\alpha_z,$$

kde veličiny označené čiarkou sú zložky väzbových síl, ktoré vznikajú len v dôsledku zotrvačných (dynamických) účinkov.

Postup pri riešení:

1. Súradnicový systém  $x, y, z$  zvolíme tak, aby os rotácie bola totožná s osou  $z$ . Ak ťažisko  $T$  leží na osi rotácie, potom os  $z$  prechádza  $T$ , ak nie, potom začiatok súradnicového systému leží na kolmici vedenej od ťažiska  $T$  na os  $z$ , alebo do jednej z podpier.
2. Vyznačíme vonkajšie zaťaženia (vlastná tiaž, atď.).

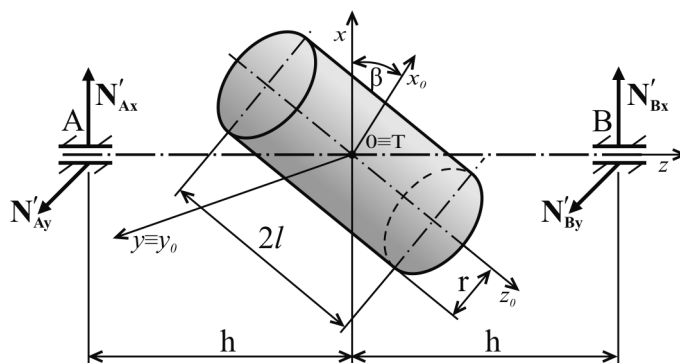
3. Určíme súradnice ťažiska.
4. Určíme deviačné momenty.
5. Napíšeme a riešime dynamické pohybové rovnice.

### 5.3.1 Príklady (Dynamické reakcie pri rotačnom pohybe telesa)

#### Príklad 5.19

Homogénny valec o tiaži  $G$  sa otáča okolo stálej osi rotácie  $z$  prechádzajúcej jeho ťažiskom stálou uhlovou rýchlosťou  $\omega$ . Hlavná centrálna os valca zvierá s osou  $z$  uhol  $\beta$ . Vypočítajte dynamické sily v radiálnych ložiskách  $A, B$ .

Dané hodnoty:  $G = mg = 5 \cdot 9,81 \text{ N}$ ,  $r = 0,05 \text{ m}$ ,  $l = 16,2 \text{ cm}$ ,  $h = 25 \text{ cm}$ ,  $\beta = 10^\circ$ ,  
 $\omega = 104,72 \text{ rad s}^{-1}$



Obr. 5.22

#### 1. Uvoľnenie:

Budeme počítať sily v ložiskách len od zotrvačných účinkov (dynamické reakcie), preto nekreslíme silu vlastnej tiaže  $G$ . Sily v ložiskách (označené čiarokou) majú zložky, ktorých orientáciu sme zvolili.

2. Dynamické pohybové rovnice (DPR) pre sily vznikajúce len od zotrvačných účinkov sú:

$$N'_{Ax} + N'_{Bx} = mx_T \omega^2 + my_T \alpha_z, \quad (1)$$

$$N'_{Ay} + N'_{By} = my_c \omega^2 - mx_T \alpha_z, \quad (2)$$

$$N'_{Az} + N'_{Bz} = 0, \quad (3)$$

$$N'_{Ay} a - N'_{By} b = -D_{yz} \omega^2 + D_{xz} \alpha_z, \quad (4)$$

$$N'_{Ax} a + N'_{Bx} b = D_{xz} \omega^2 + D_{yz} \alpha_z. \quad (5)$$

V našom príklade platí

$$m = \frac{G}{g}, \quad x_T = 0, \quad y_T = 0, \quad \alpha_z = 0, \quad a = h, \quad b = h.$$

Po dosadení DPR budú

$$N'_{Ax} + N'_{Bx} = 0, \quad (1')$$

$$N'_{Ay} + N'_{By} = 0, \quad (2')$$

$$N'_{Ay}h - N'_{By}h = 0, \quad (4')$$

$$-N'_{Ax}h + N'_{Bx}h = \frac{G}{2g} \left( \frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3} \right) \omega^2 \sin 2\beta. \quad (5')$$

Deviačné momenty  $D_{xz}$ ,  $D_{yz}$  určíme nasledovne:

Cez ťažisko valca prechádzajú centrálné osi a pretože sú aj osami symetrie, sú aj hlavnými osami  $x_0, y_0, z_0$ . Potom deviačný moment k osiam  $x, y$  pootočeným od hlavných osí  $x_0, y_0$  o uhol  $\beta$  je

$$D_{xz} = (I_{z0} - I_{x0}) \frac{\sin 2\beta}{2} + D_{x0z0} \cos 2\beta.$$

Pretože os  $x_0$  je hlavnou osou, potom

$$D_{z0x0} = D_{z0y0} = 0,$$

odkiaľ

$$D_{xz} = (I_{z0} - I_{x0}) \frac{\sin 2\beta}{2}.$$

Keďže  $I_{z0} = \frac{mr^2}{2}$ ,  $I_{x0} = m \left( \frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right)$ , potom

$$D_{xz} = m \left( \frac{r^2}{4} - \frac{l^2}{3} \right) \frac{\sin 2\beta}{2}.$$

Os  $y$  je totožná s hlavnou centrálnou osou  $y_0$ , ku ktorej sú deviačné momenty rovné 0. Takže platí

$$D_{yx} = D_{yz} = 0.$$

Zo sústavy rovníc (1'), (2'), (3'), (5') vypočítame

$$N'_{Ay} = N'_{By} = 0,$$

$$N'_{Bx} = -N'_{Ax} = -1,52 \cdot 10^2 \text{ N}.$$

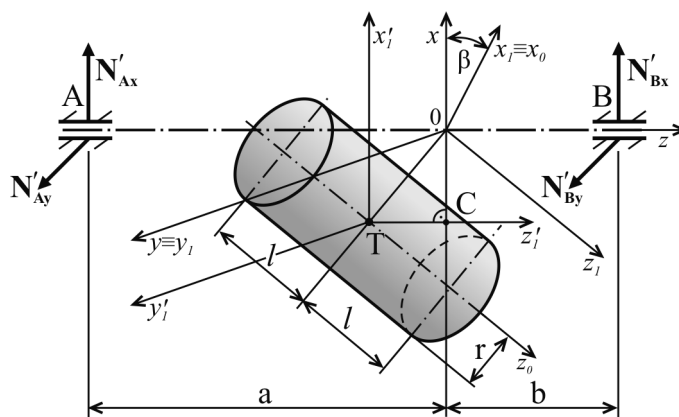
To znamená, že orientácia  $N'_{Ax}$  ostáva taká, ako sme ju zvolili, orientácia  $N'_{Bx}$  je opačná.

Je dôležité si uvedomiť, že sily v ložiskách označené čiarokou sú zaťažujúce sily vznikajúce v ložiskách v dôsledku zotrvačných účinkov a teda nejde o väzbové reakcie!

### **Príklad 5.20**

Homogénny valec o hmotnosti  $m$  sa otáča okolo stálej osi otáčania  $z$  stálou uhlovou rýchlosťou  $\omega$ . Hlavná centrálna os valca ( $z_0$ ) je vzdialená (kolmo) od osi  $z$  o hodnotu  $\rho_T$  a s osou  $z$  zvierá uhol  $\beta$ . Vypočítajte dynamické sily v radiálnych ložiskách  $A, B$  vznikajúce od zotrvačných účinkov.

Dané hodnoty:  $m = 5\text{kg}$ ,  $r = 0,05\text{m}$ ,  $l = 16,2\text{cm}$ ,  $a = 26\text{cm}$ ,  $b = 24\text{cm}$ ,  $\beta = 10^\circ$ ,  $\omega = 104,72\text{rads}^{-1}$ ,  $\overline{T_0} = \rho_T = 0,5\text{cm}$ .



Obr. 5.23

#### 1. Uvoľnenie

Sily v ložiskách počítame len od zotrvačných účinkov rotujúceho telesa. Takže nekreslíme sily od vlastnej tiaže, ani iné vonkajšie silové účinky.

2. Dynamické pohybové rovnice (DPR) pre sily vznikajúce len od zotrvačných účinkov sú

$$N'_{Ax} + N'_{Bx} = mx_T \omega^2 + my_T \alpha_z, \quad (1)$$

$$N'_{Ay} + N'_{By} = my_T \omega^2 - mx_T \alpha_z, \quad (2)$$

$$N'_{Az} - N'_{Bz} = 0, \quad (3)$$

$$N'_{Ay} a - N'_{By} b = -D_{yz} \omega^2 + D_{xz} \alpha_z, \quad (4)$$

$$-N'_{Ax} a + N'_{Bx} b = D_{xz} \omega^2 + D_{yz} \alpha_z. \quad (5)$$

V našom prípade platí

$$x_T = x_c = -\rho_T \cos \beta, \quad y_c = y_T = 0, \quad \alpha_z = 0.$$

Deviačné momenty určíme nasledovne:

Keďže osi  $x_0, y_0, z_0$  sú hlavnými, centrálnymi osami, potom platí

$$D_{z_0 y_0} = D_{x_0 z_0} = 0.$$

K pootočeným osiam  $x'_1, y'_1, z'_1$  platí

$$D_{x'_1 z'_1} = (I_{z_0} - I_{x_0}) \frac{\sin 2\beta}{2} + D_{x_0 z_0} \cos 2\beta,$$

kde 
$$I_{x_0} = I_{x_1} = m \left( \frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right),$$

$$I_{z_0} = \frac{mr^2}{2},$$

pričom  $D_{x_0 z_0} = 0$ .

K osiam  $x_1, y_1, z_1$  posunutým o hodnotu  $\rho_T$  od  $x_0, y_0, z_0$  bude

$$I_{x_1} = I_{x_0} = m \left( \frac{r^2}{2} + \frac{l^2}{3} \right),$$

Podľa Steinerovej vety

$$I_{z_1} = I_{z_0} + m\rho_T^2 = \frac{mr^2}{2} + m\rho_T^2.$$

K osiam  $x, y, z$  pootočeným o uhol  $\beta$  od  $x_1, y_1, z_1$

$$D_{xz} = (I_{z_1} - I_{x_1}) \frac{\sin 2\beta}{2} + D_{z_1 x_1} \cos 2\beta,$$

kde  $D_{z_1 y_1} = 0$  (osi symetrie),

$$D_{xz} = \left[ \frac{mr^2}{2} + m\rho_T^2 - m \left( \frac{r^2}{4} + \frac{l^2}{3} \right) \right] \frac{\sin 2\beta}{2},$$

po úprave

$$D_{xz} = \frac{m}{2} \left( \frac{r^2}{4} + \rho_T^2 - \frac{l^2}{3} \right) \sin 2\beta.$$

$D_{yz} = 0$ , lebo os  $y$  je kolmá na rovinu symetrie  $xz$  a os  $z$  je osou symetrie.

Potom DPR budú:

$$N'_{Ax} + N'_{Bx} = -m\rho_T \cos \beta \omega^2, \quad (1')$$

$$N'_{Ay} + N'_{By} = 0, \quad (2')$$

$$N'_{Ay}a - N'_{By}b = 0, \quad (4')$$

$$N'_{Ax}a - N'_{Bx}b = \omega^2 \frac{m}{2} \left( \frac{r^2}{4} + \rho_T^2 - \frac{l^2}{3} \right) \sin 2\beta. \quad (5')$$

Zo sústavy rovníc (1'), (2'), (4'), (5') vypočítame

$$N'_{Ay} = N'_{By} = 0,$$

$$N'_{Ax} = -\frac{m}{2} \omega^2 \left[ \left( \frac{r^2}{4} + \rho_T^2 - \frac{l^2}{3} \right) \frac{\sin 2\beta}{(a+b)} + \rho_T \cos \beta \right] = 16,869 \text{ N},$$

$$N'_{Bx} = \frac{m}{2} \omega^2 \left[ \left( \frac{r^2}{4} + \rho_T^2 - \frac{l^2}{3} \right) \frac{\sin 2\beta}{(a+b)} - \rho_T \cos \beta \right] = -286,85 \text{ N}.$$

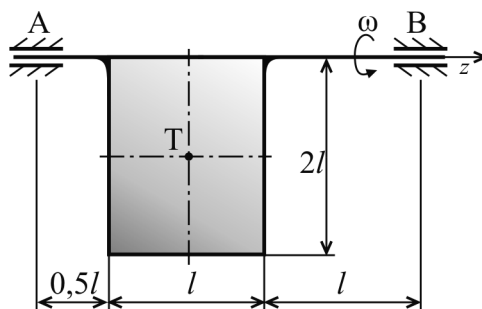
To znamená, že sila  $N'_{Ax}$  je orientovaná tak, ako sme predpokladali, sila  $N'_{Bx}$  opačne.

Je potrebné poznamenať, že sily  $N'_{Ax}$ ,  $N'_{Bx}$  sú zaťažujúce sily pôsobiace v ložiskách, ktoré vznikli v dôsledku zotrvačných účinkov rotujúceho telesa. Reakcie v ložiskách sú orientované opačne.

### **Príklad 5.21**

Homogénna doska o hmotnosti  $m$  sa otáča stálou uhlovou rýchlosťou  $\omega$  v radiálnych ložiskách  $A, B$  okolo osi  $z$ . Vypočítajte veľkosť sily v ložisku  $A$  v dôsledku zotrvačných síl.

Dané hodnoty:  $m = 0,4 \text{ kg}$ ,  $\omega = 60 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $l = 10 \text{ cm}$ .



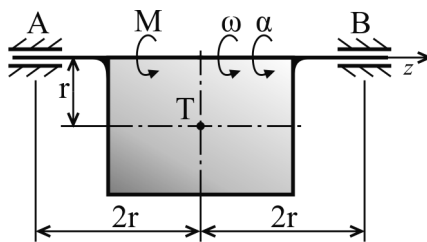
Obr. 5.24

(57,6 N)

### **Príklad 5.22**

Homogénny valec o hmotnosti  $m$  sa otáča pod vplyvom momentu  $M$  okolo osi  $z$ . Vypočítajte veľkosť sily pôsobiacej na ložisko  $A$  v časovom okamihu, kedy uhlová rýchlosť je  $\omega_1$ , uhlové zrýchlenie  $\alpha = \text{konšt.}$

Dané hodnoty:  $m = 10 \text{ kg}$ ,  $\omega_1 = 5 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $\alpha = 50 \text{ rad.s}^{-2}$ ,  $r = 0,2 \text{ m}$ .



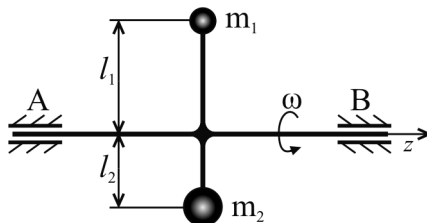
Obr. 5.25

(55,9 N)

### **Príklad 5.23**

Bremená (považujme ich za hmotné body) o hmotnostiach  $m_1, m_2$  sú uchytené k prútu (zanedbateľnej hmotnosti). Určte hmotnosť  $m_2$  tak, aby sily v ložiskách vznikajúce v dôsledku zotrvačných účinkov boli pri rotácii stálou uhlovou rýchlosťou  $\omega$  rovné nule.

Dané hodnoty:  $m_1 = 2 \text{ kg}$ ,  $l_1 = 0,5 \text{ m}$ ,  $l_2 = 0,2 \text{ m}$ .



Obr. 5.26

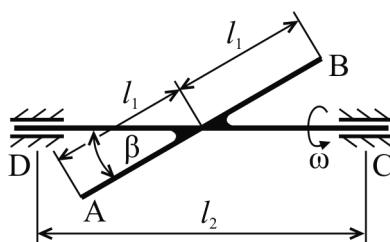
(5 kg)

### **Príklad 5.24**

Homogénny prút  $AB$  o hmotnosti  $m$  sa otáča stálou rýchlosťou  $\omega$ . Určte veľkosť sily pôsobiacej v ložisku  $C$  v dôsledku zotrvačných účinkov.

Dané hodnoty:  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $\omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$ ,  $l_1 = 0,3 \text{ m}$ ,  $l_2 = 0,8 \text{ m}$





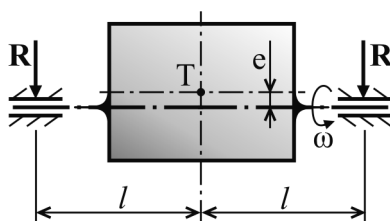
Obr. 5.27

(1,62 N)

### **Príklad 5.25**

Rotor o hmotnosti  $m$  sa otáča okolo osi  $z$  stálou uhlovou rýchlosťou  $\omega$ . Aká môže byť najväčšia vzdialenosť hlavnej centrálnej osi rotora od osi rotácie ( $e$ ), aby sily v radiálnych ložiskách vznikajúce od zotrvačných účinkov neboli väčšie ako  $R$ .

Dané hodnoty:  $m = 400 \text{ kg}$ ,  $n = 3000 \text{ ot.min}^{-1}$ ,  $R = 400 \text{ N}$



Obr. 5.28

(0,0203 m)

## 6 VŠEOBECNÝ ROVINNÝ POHYB TELESA

Teleso vykonáva všeobecný rovinný pohyb vtedy, ak sa všetky jeho body pohybujú po rovinných krivkách a tie ležia v navzájom rovnobežných rovinách.

Všeobecný rovinný pohyb sa rozkladá na posuvný pohyb ťažiska telesa (ako hmotného bodu), v ktorom je sústredená hmota telesa a na otáčavý pohyb telesa okolo osi prechádzajúcej jeho ťažiskom a kolmej na rovinu pohybu.

Keďže teleso má v rovine 3 stupne voľnosti, môžeme písať najviac 3 lineárne nezávislé dynamické pohybové rovnice (DPR) všeobecného rovinného pohybu telesa:

$$m \mathbf{a}_T = \mathbf{F}, \quad \text{resp.} \quad m\ddot{x}_T = \sum F_{ix}, \quad m\ddot{y}_T = \sum F_{iy}, \quad m\ddot{z}_T = \sum F_{iz},$$

$$I \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{M}, \quad \text{resp.} \quad I\alpha = \sum M_{iz},$$

kde  $m$  je hmotnosť telesa,

$I$  moment zotrvačnosti k osi prechádzajúcej ťažiskom telesa a kolmej na rovinu pohybu,

$\mathbf{a}_T$  je zrýchlenie ťažiska telesa,

$\ddot{x}_T, \ddot{y}_T, \ddot{z}_T$  zložky zrýchlenia ťažiska telesa,

$\mathbf{F}$  výsledná vonkajšia sila,

$F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}$  zložky vonkajších síl pôsobiacich na teleso,

$\mathbf{M}$  moment vonkajších síl,

$M_z$  moment vonkajších síl otáčajúcich telesom okolo osi kolmej na rovinu pohybu telesa.

Kinetická energia telesa vykonávajúceho všeobecný rovinný pohyb je

$$E_K = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} I \omega^2,$$

kde  $v_T$  je rýchlosť posuvného pohybu ťažiska,

$\omega$  uhlová rýchlosť k osi otáčania telesa.

Moment hybnosti telesa vykonávajúceho všeobecný rovinný pohyb je

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}_T \times m \mathbf{v}_T + I \boldsymbol{\omega},$$

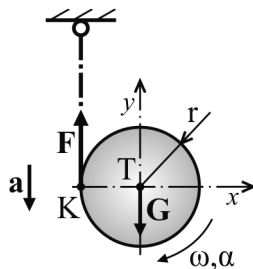
kde  $\mathbf{r}_T$  je polohový vektor ťažiska telesa.

## 6.1 Príklady (Všeobecný rovinný pohyb telesa)

### Príklad 6.1

Na valci je navinuté lano. Pod vplyvom vlastnej tiaže sa valec pohybuje. Vypočítajte zrýchlenie, ktorým sa pohybuje, uhlové zrýchlenie, silu v lane a kinetickú energiu valca. Hmotnosť valca je  $m$ , hmotnosť lana zanedbajte.

Dané hodnoty:  $m, r$



Obr. 6.1

#### 1. Uvoľnenie

Pri pohybe valca po odvíjajúcom sa lane pôsobí na neho sila tiaže  $G$  a sila v lane  $F$ . Valec sa pohybuje všeobecným rovinným pohybom, pričom ťažisko valca sa pohybuje priamočiarno zrýchlene. V smere osi  $x$  nepôsobia žiadne sily.

#### 2. Dynamické pohybové rovnice valca

Valec predstavuje teleso v rovine (má tri stupne voľnosti):

$$x \dots 0 = 0, \quad (1)$$

$$y \dots ma_{yT} = \sum F_{iy}, \quad (2)$$

$$(\dots)_T \dots \alpha I_T = \sum (M_i)_T, \quad (3)$$

po dosadení dostávame

$$ma_{yT} = G - F, \quad (2)$$

$$\alpha I_z = Fr, \quad (3)$$

kde  $I_z = \frac{mr^2}{2}$  je moment zotrvačnosti valca.

Keďže v rovniciach (2), (3) sú tri neznáme ( $a_{yT}, \alpha, F$ ), je potrebné nájsť ďalší vzťah (podmienku, rovnicu). Pomôžeme si kinematickou závislosťou medzi zrýchlením ťažiska valca  $a_{yT}$  pri jeho rotácii okolo okamžitého stredu otáčania  $K$ , teda

$$a_{yT} = \alpha r. \quad (4)$$

Potom po vyjadrení zo sústavy rovníc je zrýchlenie ťažiska valca  $a = \frac{2}{3}g$  a jeho uhlové zrýchlenie  $\alpha = \frac{2}{3} \frac{g}{r}$ . Sila v lane je  $F = \frac{1}{3}mg$ .

Pre kinetickú energia valca platí

$$E_K = \frac{1}{2}mv_T^2 + \frac{1}{2}I_T\omega^2,$$

odkiaľ po dosadení za

$$v_T = \alpha t = \frac{2}{3}gt, \quad \omega = \alpha t = \frac{2}{3} \frac{g}{r}t,$$

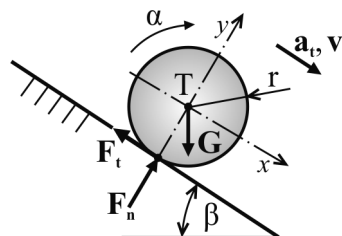
dostávame

$$E_K = \frac{1}{3}mg^2t^2.$$

### **Príklad 6.2**

Valec o hmotnosti  $m$  a polomere  $r$  sa valí dole drsnou naklonenou rovinou bez preklzavania. Trenie medzi valcom a rovinou je vyjadrená súčiniteľom šmykového trenia  $f$ . Určte zrýchlenie ťažiska valca.

Dané hodnoty:  $m, r, \beta, f$



Obr. 6.2

#### 1. Uvoľnenie

Pri pohybe valca dole drsnou naklonenou rovinou ide o jeho všeobecný rovinný pohyb, pričom ťažisko valca sa pohybuje priamočiarno. Na valec pôsobí sila tiaže  $G$ , tangenciálna ( $F_t$ ) a normálová zložka ( $F_n$ ) šmykového odporu podložky.

#### 2. Dynamické pohybové rovnice (DPR) valca

Valec predstavuje teleso, ktoré má v rovine tri stupne voľnosti, teda teoreticky vieme napísať tri lineárne nezávislé dynamické pohybové rovnice:

$$x \dots ma_T = \sum F_{ix}, \quad (1)$$

$$y \dots ma_{yT} = \sum F_{iy}, \quad (2)$$

$$\sum (M_i)_T = \alpha \cdot I_T \quad (3)$$

Ak uvažíme, že ťažisko valca sa pohybuje priamočiarno v smere osi  $x$ , potom  $a_{yT} = 0$ ,

$I_z = \frac{1}{2}mr^2$ . Po dosadení do DPR dostávame

$$ma_T = G \sin \beta - F_t, \quad (1)$$

$$0 = -G \sin \beta + F_n, \quad (2)$$

$$\alpha \frac{1}{2}mr^2 = F_t r. \quad (3)$$

V týchto troch rovniciach sú štyri neznáme ( $a_T, F_t, F_n, \alpha$ ), preto doplníme sústavu rovníc o kinematickú rovnicu

$$a = \alpha r. \quad (4)$$

Potom zo sústavy rovníc (1) až (4) určíme veľkosť normálovej zložky šmykového odporu podložky

$$F_n = mg \cos \beta,$$

veľkosť tangenciálnej zložky šmykového odporu podložky

$$F_t = \frac{1}{3}mg \sin \beta,$$

veľkosť zrýchlenia ťažiska valca v smere osi  $x$

$$a_T = \frac{2}{3}g \sin \beta$$

a veľkosť uhlového zrýchlenia pohybu valca

$$\alpha = \frac{a_T}{r}.$$

Ak porovnáme veľkosti tangenciálnej zložky šmykového odporu podložky vypočítanej zo sústavy rovníc

$$F_t = \frac{1}{3}mg \sin \beta$$

s tangenciálnou zložkou vyjadrenou z Coulombovho vzťahu

$$F_t = fF_n = fmg \cos \beta,$$

potom z  $\tan \beta = 3f$  vyplynie uhol

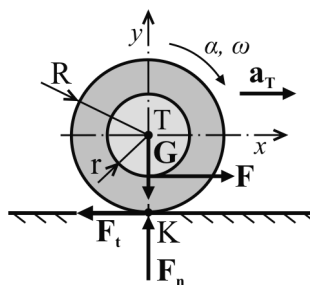
$$\beta = \arctg 3f,$$

čo je najväčší uhol sklonu naklonenej roviny, pri ktorom počas valenia valca nedôjde k preklzávaniu valca po podložke.

### **Príklad 6.3**

Na tenký homogénny disk o hmotnosti  $m_1$ , polomere  $R$  je pevne uchytený disk o hmotnosti  $m_2$ , polomere  $r$ , na ktorý je navinuté lano. Disky sa valia po vodorovnej drsnej podložke pod vplyvom vodorovnej sily  $F$  v lane. Určte zrýchlenie ťažiska diskov, ak súčiniteľ šmykového trenia medzi diskom a podložkou je  $f$ .

Dané hodnoty:  $m_1, m_2, r, R, f, F$



Obr. 6.3

#### 1. Uvoľnenie

Na (spoločné) teleso dvoch diskov pôsobí ich vlastná (spoločná) tiaž  $G$ , sila v lane  $F$ , tangenciálna ( $F_t$ ) a normálová ( $F_n$ ) zložka šmykového odporu podložky. Teleso sa pohybuje všeobecným rovinným pohybom, jeho ťažisko  $T$  vodorovne zrýchlene.

#### 2. Dynamické pohybové rovnice (DPR) telesa

Teleso má v rovine 3 stupne voľnosti, teda vieme napísať tri lineárne nezávislé DPR:

$$x \dots ma_T = \sum F_{ix}, \quad (1)$$

$$y \dots ma_{yT} = \sum F_{iy}, \quad (2)$$

$$(\ )_T \dots \alpha I_T = \sum (M_i)_T. \quad (3)$$

Ak uvažíme, že pri pohybe telesa sa ťažisko pohybuje priamočiarno v smere osi  $x$ , potom  $a_{yT} = 0$ , teda DPR budú

$$ma_T = F - F_t, \quad (1)$$

$$0 = F_n - G, \quad (2)$$

$$\alpha I_T = -Fr + F_t R. \quad (3)$$

V rovniciach (1),(2),(3) sú štyri neznáme ( $a_T, F_t, F_n, \alpha$ ), preto sústavu rovníc doplníme o kinematickú podmienku otáčania telesa okolo okamžitého stredu otáčania  $K$

$$a_T = \alpha R. \quad (4)$$

Potom zo sústavy rovníc vieme vyjadriť zrýchlenie ťažiska

$$a_T = \frac{FR(R-r)}{mR^2 + I_T},$$

tangenciálnu zložku šmykového odporu podložky

$$F_t = \frac{mR^2 + I_T - mR(R-r)}{mR^2 + I_T} F$$

a uhlové zrýchlenie telesa

$$\alpha = \frac{a_T}{R}.$$

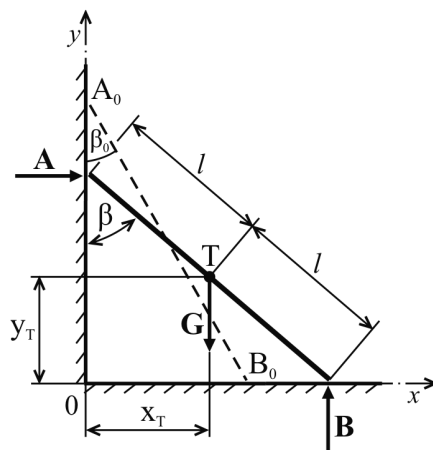
Aby nedošlo k tomu, že pri istej veľkosti sily  $F$  bude valenie telesa orientované opačne, než je kladná orientácia osi  $x$ , musí byť splnená statická podmienka valenia

$$F \leq fmg.$$

#### **Príklad 6.4**

Tenčná tyč o tiaži  $G$  a dĺžke  $2l$  sa opiera koncami o hladké podložky (steny) v bodoch  $A, B$ . Na začiatku je v pokoji a zvislou stenou uhol  $\beta_0$ . Po uvoľnení tyč padá. Určte, pri akom uhle  $\beta$  sa koniec tyče prestane opierať o stenu, určte reakciu stien.

Dané hodnoty:  $G, l, \beta$



**Obr.6.4**

#### **1. Uvoľnenie**

Vo všeobecnom časovom okamihu pôsobí v ťažisku tyče, ktorú považujeme za teleso v rovine, jej vlastná tiaž  $G$ , v miestach dotyku telesa so stenami reakcie  $A, B$  (normálové zložky reakcií, keďže steny sú hladké). Pri pohybe (zosúvaní) tyč vykonáva všeobecný rovinný pohyb.

## 2. Dynamické pohybové rovnice (DPR) tyče

Teleso má v rovine tri stupne voľnosti, môžeme napísať najviac tri lineárne nezávislé DPR:

$$x \dots ma_{xT} = \sum F_{ix}, \quad (1)$$

$$y \dots ma_{yT} = \sum F_{iy}, \quad (2)$$

$$(\dots)_T \dots \alpha I_T = \sum (M_i)_T. \quad (3)$$

Po dosadení za  $I_T = \frac{Gl^2}{3g}$ ,  $m = \frac{G}{g}$  budú DPR:

$$\frac{G}{g} \ddot{x}_T = A, \quad (4)$$

$$\frac{G}{g} \ddot{y}_T = B - G, \quad (5)$$

$$\ddot{\beta} \frac{Gl^2}{3g} = Bl \sin \beta - Al \cos \beta, \quad (6)$$

potom zo sústavy rovníc (4), (5), (6) bude

$$\frac{l}{3} \ddot{\beta} = (\ddot{y}_T + g) \sin \beta - \ddot{x}_T \cos \beta. \quad (6)$$

Poloha ťažiska telesa vo všeobecnom časovom okamihu je určená súradnicami

$$x_T = l \sin \beta, \quad y_T = l \cos \beta.$$

Ak derivujeme dvakrát tieto súradnice podľa času, dostaneme zložky zrýchlenia ťažiska

$$\begin{aligned} \ddot{x}_T &= l(\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta), \\ \ddot{y}_T &= -l(\ddot{\beta} \sin \beta + \dot{\beta}^2 \cos \beta). \end{aligned}$$

Dosadením do (6) dostávame

$$\ddot{\beta} = \frac{3}{4} \frac{g}{l} \sin \beta. \quad (6)$$

Ak použijeme definičný vzťah  $\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt}$  a integrujeme rovnicu (6), potom

$$\int_0^{\dot{\beta}} \dot{\beta} d\dot{\beta} = \frac{3}{4} \frac{g}{l} \int_{\beta_0}^{\beta} \sin \beta d\beta,$$

odkiaľ

$$\dot{\beta}^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l} (\cos \beta_0 - \cos \beta). \quad (7)$$



Ak sa koniec tyče pri jej zosúvaní oddelí od steny, bude platiť, že  $\ddot{x}_T = 0$  a potom z rovnice

$$\ddot{x}_T = l(\ddot{\beta} \cos \beta - \dot{\beta}^2 \sin \beta),$$

pre

$$\ddot{\beta} = \frac{3}{4} \frac{g}{l} \sin \beta \quad \text{a} \quad \dot{\beta}^2 = \frac{3}{2} \frac{g}{l} (\cos \beta_0 - \cos \beta),$$

dostávame

$$[\cos \beta_1 - 2(\cos \beta_0 - \cos \beta_1)] \sin \beta_1 = 0,$$

kde uhol  $\beta_1$  je uhol, pri ktorom sa koniec tyče oddelí od steny.

Keďže  $\sin \beta_1 \neq 0$ , potom musí platiť

$$\cos \beta_1 - 2(\cos \beta_0 - \cos \beta_1) = 0,$$

odkiaľ

$$\beta_1 = \arccos\left(\frac{2}{3} \cos \beta_0\right).$$

Z rovníc (4), (5), (6), (7) sa dajú určiť zložky zrýchlenia ťažiska tyče

$$\ddot{x}_T = \frac{3}{4} g (3 \cos \beta - 2 \cos \beta_0) \sin \beta,$$

$$\ddot{y}_T = -\frac{9}{4} g \sin^2 \beta + \frac{3}{2} g (1 - \cos \beta_0 \cos \beta)$$

a reakcie stien

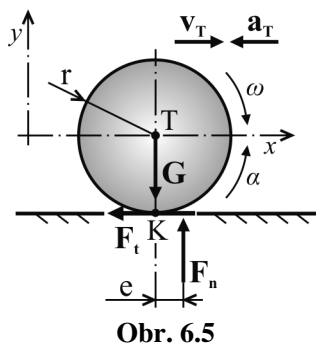
$$A = \frac{3}{4} G (3 \cos \beta - 2 \cos \beta_0) \sin \beta,$$

$$B = \frac{1}{4} G (10 - 9 \sin^2 \beta - G \cos \beta_0 \cos \beta).$$

### **Príklad 6.5**

Homogénny valec o hmotnosti  $m$  sa valí po drsnej podložke bez preklzávania (rameno valivého odporu  $e$ ). V dôsledku valivého odporu sa jeho pohyb zastaví na dráhe  $x_1$ . Určte veľkosť ramena valivého odporu, ak začiatočná rýchlosť pohybu ťažiska valca v smere osi  $x$  bola  $v_0$ .

Dané hodnoty:  $m, r, x_1, v_0$



Obr. 6.5

### 1. Uvoľnenie

V ťažisku valca pôsobí sila tiaže  $G$ , reakcia podložky má tangenciálnu ( $F_t$ ) a normálovú ( $F_n$ ) zložku. Valec predstavuje teleso, ktoré sa pohybuje všeobecným rovinným pohybom, pričom ťažisko  $T$  sa pohybuje priamočiarno zrýchlene (resp. v tomto prípade spomalene).

### 2. Dynamické pohybové rovnice (DPR) valca

Valec ako teleso v rovine má tri stupne voľnosti, preto môžeme napísať najviac tri lineárne nezávislé DPR:

$$x \dots ma_{xT} = \sum F_{ix}, \quad (1)$$

$$y \dots ma_{yT} = \sum F_{iy}, \quad (2)$$

$$(\ )_T \dots \alpha I_T = \sum (M_i)_T. \quad (3)$$

Ak uvažíme, že pri priamočiarom pohybe ťažiska je  $a_{yT} = 0$  a moment zotrvačnosti valca je  $I_T = \frac{1}{2}mr^2$  a DPR budú:

$$ma_{xT} = F_t,$$

$$0 = F_n - G,$$

$$\alpha I_T = F_n e - F_t r.$$

Pre rotačný pohyb valca okolo okamžitého stredu otáčania  $K$  platí  $a_{xT} = \alpha r$ . Potom z DPR odvodíme zrýchlenie ťažiska valca v tvare

$$a_{xT} = \frac{Ger}{mr^2 + I_T}.$$

Pre rýchlenie  $a_{xT}$  je možné z definície

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = v \frac{dv}{dx} = \frac{dv^2}{2dx}$$

vyjadriť

$$v_0^2 = \frac{2Ger}{mr^2 + I_T} x_1,$$

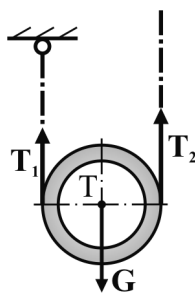
odkiaľ po dosadení za  $I_T$  dostávame vzťah pre výpočet ramena valivého odporu

$$e = v_0^2 \frac{3r}{4gx_1}.$$

### **Príklad 6.6**

Okolo rúrky o hmotnosti  $m$  je obtočené lano, v ktorom sú sily pri dvíhaní rúrky  $T_1$ ,  $T_2$ . Určte zrýchlenie ťažiska rúrky.

Dané hodnoty:  $m = 700 \text{ kg}$ ,  $T_1 = 3504 \text{ N}$ ,  $T_2 = 4133 \text{ N}$



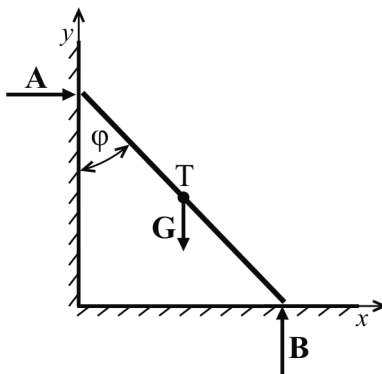
Obr. 6.6

(1,1 ms<sup>-2</sup>)

### **Príklad 6.7**

V miestach A, B hladkej steny sa opiera tyč o hmotnosti  $m$ , ktorá sa z pokoja začína zosúvať pod vplyvom vlastnej tiaže tak, že jej ťažisko má zrýchlenie  $\mathbf{a}_T$ . Určte veľkosť normálovej zložky reakcie v bode A.

Dané hodnoty:  $m = 3 \text{ kg}$ ,  $\varphi_0 = 60^\circ$ ,  $\mathbf{a}_T = \mathbf{i} - 5,5\mathbf{j}$



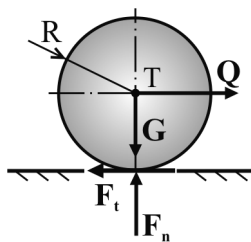
Obr. 6.7

(3 N)

### **Príklad 6.8**

Plné homogénne koleso o hmotnosti  $m$ , polomere  $R$  sa odvaľuje po drsnej podložke bez preklzavania vplyvom vodorovnej sily  $Q$ , ktorá pôsobí v jeho ťažisku. Trenie medzi kolesom a podložkou je vyjadrené tangenciálnou zložkou šmykového odporu podložky  $F_t$ . Určte veľkosť uhlového zrýchlenia kolesa, ak moment zotrvačnosti kolesa je  $I_T$ .

Dané hodnoty:  $m = 20 \text{ kg}$ ,  $Q = 120 \text{ N}$ ,  $F_t = 40 \text{ N}$ ,  $R = 0,3 \text{ m}$ ,  $I_T = 0,9 \text{ kgm}^2$



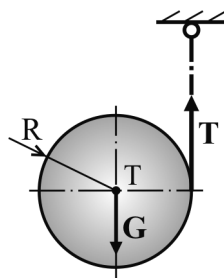
Obr. 6.8

$(13,3 \text{ rads}^{-2})$

### **Príklad 6.9**

Na homogénny valec o hmotnosti  $m$ , polomeru  $R$  je obtočené lano. Pri jeho pohybe pod vplyvom vlastnej tiaže je sila v lane  $T$ . Určte uhlovú rýchlosť valca  $\omega$  v čase  $t_1$ , ak na začiatku pri  $t = 0$  bola  $\omega_0 = 0$ .

Dané hodnoty:  $m = 6 \text{ kg}$ ,  $R = 0,08 \text{ m}$ ,  $T = 19,6 \text{ N}$ ,  $t_1 = 0,4 \text{ s}$



Obr. 6.9

$(32,7 \text{ rads}^{-1})$

## 7 SFÉRICKÝ POHYB TELESA

Tuhé teleso vykonáva sférický pohyb, ak jeden jeho bod sa v skúmanom časovom intervale nepohybuje. Alebo inak – jeden jeho bod je trvalo v pokoji.

Konstrukčne sa to dá dosiahnuť guľovým čapom, opretým hrotom v lôžku, Cardanovým závesom a pod.

Teleso vykonávajúce sférický pohyb má tri stupne voľnosti, preto jeho pohyb popisujú tri dynamické pohybové rovnice, obyčajne odvodené z vety o zmene momentu hybnosti

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt},$$

kde  $\mathbf{M}$  je moment vonkajších síl,

$\mathbf{L}$  je moment hybnosti telesa.

Majme vzťažnú súradnicovú sústavu  $0, x, y, z$  a v nej sa spolu s telesom vykonávajúcim sférický pohyb pohybujúcu súradnicovú sústavu  $0, x_1, y_1, z_1$ .

Začiatok  $0$  tejto súradnicovej sústavy je v strede sférického pohybu a súradnicové osi  $x_1, y_1, z_1$  sú zároveň hlavnými osami zotrvačnosti.

Potom dynamické (Eulerove) pohybové rovnice v zložkovom tvare budú

$$M_{x_1} = I_{x_1} \dot{\omega}_{x_1} + \omega_{y_1} \omega_{z_1} (I_{z_1} - I_{y_1}),$$

$$M_{y_1} = I_{y_1} \dot{\omega}_{y_1} + \omega_{z_1} \omega_{x_1} (I_{x_1} - I_{z_1}),$$

$$M_{z_1} = I_{z_1} \dot{\omega}_{z_1} + \omega_{x_1} \omega_{y_1} (I_{y_1} - I_{x_1}),$$

kde  $\omega_{x_1}, \omega_{y_1}, \omega_{z_1}$  sú zložky okamžitej uhlovej rýchlosti, ktoré sa určia z Eulerových kinematických rovníc

$$\omega_{x_1} = \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi,$$

$$\omega_{y_1} = \dot{\psi} \cos \varphi \sin \vartheta - \dot{\vartheta} \sin \varphi,$$

$$\omega_{z_1} = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi},$$

pričom  $\varphi, \psi, \vartheta$  sú Eulerove uhly, ktorými sa určia transformačné rovnice medzi vzťažnou (nepohyblivou) súradnicovou sústavou  $0, x, y, z$  a súradnicovou sústavou  $0, x_1, y_1, z_1$  (pohyblivou) spojenou s telesom vykonávajúcim sférický pohyb.

Kinetická energia telesa vykonávajúceho sférický pohyb je

$$E_K = \frac{1}{2} I_0 \omega^2 ,$$

kde  $I_0$  je moment zotrvačnosti telesa k okamžitej osi rotácie,

$\omega$  okamžitá uhlová rýchlosť sférického pohybu telesa.

Ak  $I_0$ ,  $\omega$  vyjadríme v súradnicovej sústave  $0, x_1, y_1, z_1$  a ak osi  $x_1, y_1, z_1$  sú hlavnými osami zotrvačnosti, potom

$$E_K = \frac{1}{2} I_{x_1} \omega_{x_1}^2 + \frac{1}{2} I_{y_1} \omega_{y_1}^2 + \frac{1}{2} I_{z_1} \omega_{z_1}^2 .$$

Moment hybnosti telesa vykonávajúceho sférický pohyb v súradnicovej sústave  $0, x_1, y_1, z_1$ , kde osi  $x_1, y_1, z_1$  sú hlavnými osami zotrvačnosti, je

$$\mathbf{L} = L_{x_1} \mathbf{i}_{x_1} + L_{y_1} \mathbf{j}_{y_1} + L_{z_1} \mathbf{k}_{z_1} ,$$

kde  $L_{x_1} = I_{x_1} \omega_{x_1}$ ,  $L_{y_1} = I_{y_1} \omega_{y_1}$ ,  $L_{z_1} = I_{z_1} \omega_{z_1}$  sú zložky momentu hybnosti v smere osí  $x_1, y_1, z_1$ .

Medzi okamžitou uhlovou rýchlosťou  $\boldsymbol{\omega}$  a momentom hybnosti  $\mathbf{L}$  pri sférickom pohybe platí

$$\mathbf{L} \cdot d\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{L} .$$

Na teleso vykonávajúce dva súčasné rotačné pohyby pôsobí gyroskopický moment

$$\mathbf{M}_G = \mathbf{L} \times \boldsymbol{\psi} ,$$

kde  $\boldsymbol{\psi}$  je uhlová rýchlosť pri precesnom pohybe telesa,

$\mathbf{L}$  moment hybnosti vlastnej rotácie telesa.

Ďalšie vzťahy používané pri riešení sférického pohybu telesa napr. pri výpočte reakcií uloženia alebo s uvažovaním pasívnych odporov sa odvodí z vety o pohybe ťažiska

$$m \mathbf{a}_T = \sum_i \mathbf{F}_i ,$$

v zložkovom tvare

$$m a_{Tx_1} = \sum F_{ix_1} ,$$

$$m a_{Ty_1} = \sum F_{iy_1} ,$$

$$m a_{Tz_1} = \sum F_{iz_1} ,$$

kde

$$\mathbf{a}_T = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_T + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_T = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_T + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_T) ,$$

$$\mathbf{a}_T = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_T + (\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_T) \boldsymbol{\omega} - \omega^2 \mathbf{r}_T .$$

Po vyjadrení jednotlivých vektorov ich zložkami, dostávame

$$a_{Tx_1} = \alpha_{y_1} z_{1T} - \alpha_{z_1} y_{1T} + \omega_{x_1} (\omega_{x_1} x_{1T} + \omega_{y_1} y_{1T} + \omega_{z_1} z_{1T}) - x_{1T} (\omega_{x_1}^2 + \omega_{y_1}^2 + \omega_{z_1}^2),$$

$$a_{Ty_1} = \alpha_{z_1} x_{1T} - \alpha_{x_1} z_{1T} + \omega_{y_1} (\omega_{x_1} z_{1T} + \omega_{y_1} y_{1T} + \omega_{z_1} z_{1T}) - y_{1T} (\omega_{x_1}^2 + \omega_{y_1}^2 + \omega_{z_1}^2),$$

$$a_{Tz_1} = \alpha_{x_1} x_{1T} - \alpha_{y_1} z_{1T} + \omega_{z_1} (\omega_{x_1} z_{1T} + \omega_{y_1} y_{1T} + \omega_{z_1} z_{1T}) - z_{1T} (\omega_{x_1}^2 + \omega_{y_1}^2 + \omega_{z_1}^2),$$

kde  $\mathbf{r}_T$  je polohový vektor ťažiska,

$x_{1T}, y_{1T}, z_{1T}$  súradnice ťažiska,

$\mathbf{v}_T, \mathbf{a}_T$  rýchlosť a zrýchlenie ťažiska,

$a_{Tx_1}, a_{Ty_1}, a_{Tz_1}$  zložky zrýchlenia ťažiska,

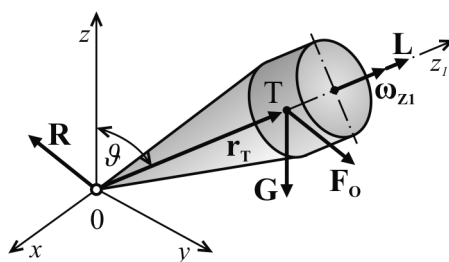
$\mathbf{F}_i, F_{ix_1}, F_{iy_1}, F_{iz_1}$  vonkajšia sila a jej zložky.

## 7.1 Príklady (Sféricky pohyb telesa)

### Príklad 7.1

Rotačné teleso sa skladá z valcovej a kužeľovej časti. Otáča sa okolo vlastnej osi rotácie  $z_1$  uhlovou rýchlosťou  $\omega_{z_1}$  a súčasne okolo osi  $z$  uhlovou rýchlosťou  $\omega_z$ , ktorá je v porovnaní s  $\omega_{z_1}$  zanedbateľná. Uhol sklonu vlastnej osi rotácie  $\vartheta$  je konštantný, moment zotrvačnosti celého telesa k tejto osi je  $I_{z_1}$  a vzdialenosť ťažiska telesa od začiatku súradnicovej sústavy je  $r_T$ . Určte približnú veľkosť vodorovnej reakcie uloženia v strede sférického pohybu telesa.

Dané hodnoty:  $m, I_{z_1}, \vartheta, \omega_{z_1}, \omega_z, r_T$



Obr. 7.1

#### 1. Uvoľnenie

V ťažisku telesa pôsobí sila jeho vlastnej tiaže  $G$ , odstredivá sila  $F_0$ , v uložení vektor reakcie  $\mathbf{R}$ . Teleso vykonáva sférický pohyb.

## 2. Dynamické pohybové rovnice

Ak platí predpoklad (pozri zadanie príkladu), že  $\omega_{z_1} \gg \omega_z$ , potom sa dá s vyhovujúcou presnosťou predpokladať, že výsledný moment hybnosti je

$$\mathbf{L} \approx I_{z_1} \boldsymbol{\omega}_{z_1}.$$

Vektor momentu hybnosti  $\mathbf{L}$  sa otáča okolo osi  $z$  uhlovou rýchlosťou  $\omega_z$ , potom rýchlosť jeho konca je

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}_z \times \mathbf{L} \approx \mathbf{M}.$$

$$\text{Keďže platí, že } \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt},$$

kde  $\mathbf{M}$  je moment vonkajších síl  $\mathbf{M} = \mathbf{r}_T \times \mathbf{G}$ .

Potom v zložkovom tvare bude

$$Gr_T \sin \vartheta = I_{z_1} \omega_{z_1} \omega_z \sin \vartheta,$$

odkiaľ

$$\omega_z = \frac{Gr_T}{I_{z_1} \omega_{z_1}}.$$

Normálová zložka zrýchlenia ťažiska telesa je

$$a_n = r_T \sin \vartheta \omega_z^2 = r_T \sin \vartheta \left( \frac{Gr_T}{I_{z_1} \omega_{z_1}} \right)^2.$$

Odstredivá sila  $\mathbf{F}_0$  je jedinou silou, ktorá pôsobí na teleso horizontálne, teda je zachytená reakciou

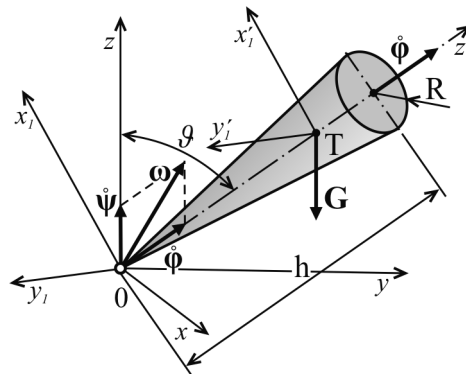
$$R = ma_n = \frac{G^3 r_T^3}{g I_{z_1}^2 \omega_{z_1}^2} \sin \vartheta.$$

### **Príklad 7.2**

Teleso v tvare rotačného kužeľa o hmotnosti  $m$ , polomere podstavy  $R$  je uchytené v guľovom kĺbe 0. Otáča sa okolo vlastnej osi rotácie  $z_1$  stálou uhlovou rýchlosťou  $\dot{\phi}$  a okolo osi  $z$  uhlovou rýchlosťou (precesný pohyb)  $\dot{\psi}$ .

Dané hodnoty:  $m, R, \dot{\phi}, \dot{\psi}, \vartheta, h$





Obr. 7.2

### 1. Uvoľnenie

V ťažisku kužeľa pôsobí sila jeho tiaže  $G$ . Kužeľ (teleso) vykonáva sférický pohyb.

### 2. Dynamické pohybové rovnice

Teleso vykonáva sférický pohyb, ktorého okamžitá uhlová rýchlosť  $\omega = \dot{\phi} + \dot{\psi}$ .

Súradnicová sústava  $0, x, y, z$  je nepohyblivá (vzťažná), súradnicová sústava  $0, x_1, y_1, z_1$  je pevne spojená s pohybujúcim sa telesom tak, že os vlastnej rotácie je totožná s osou  $z_1$ . Moment vonkajších síl pôsobiacich na kužeľ je  $\mathbf{M} = \mathbf{r}_T \times \mathbf{G}$ , je kolmý na rovinu vektorov  $\mathbf{r}_T, \mathbf{G}$  a rovnobežný s priesečnicou rovín  $xy, x_1y_1$ .

Moment  $\mathbf{M}$  vonkajších síl sa dá vyjadriť zmenou (jeho rýchlosťou  $\mathbf{v}$ ) koncového bodu vektora  $\mathbf{L}$ , ktorý sa otáča okolo osi  $z$  uhlovou rýchlosťou (precesnou)  $\dot{\psi}$ , keďže veľkosť momentu hybnosti  $\mathbf{L}$  je stála a mení sa len jeho smer

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}, \text{ potom } d\mathbf{L} = \mathbf{M}dt, \text{ teda}$$

$$\mathbf{v} = \dot{\psi} \times \mathbf{L} \approx \mathbf{M}.$$

Zložky momentu hybnosti  $\mathbf{L}$  v súradnicovej sústave  $0, x_1, y_1, z_1$  pre  $\vartheta = \text{konšt.}$  sú

$$L_{x_1} = I_{x_1} \dot{\psi} \sin \vartheta, \quad L_{y_1} = 0, \quad L_{z_1} = I_{z_1} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \vartheta).$$

Moment  $\mathbf{M}$  po dosadení za moment hybnosti  $\mathbf{L}$  je

$$\mathbf{M} = \dot{\psi} \mathbf{k} \times [\mathbf{i}_{x_1} I_{x_1} \dot{\psi} \sin \vartheta + \mathbf{k}_{z_1} I_{z_1} (\dot{\phi} + \dot{\psi} \cos \vartheta)].$$

Po úprave bude

$$\mathbf{M} = \mathbf{j}_{y_1} [\dot{\psi}^2 \sin \vartheta \cos \vartheta (I_{y_1} - I_{z_1}) - I_{z_1} \dot{\phi} \dot{\psi} \sin \vartheta], \quad (1)$$

kde  $\mathbf{k} \times \mathbf{i}_{x_1} = \mathbf{j}_{y_1} \cos \vartheta$ ,

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k}_{z_1} = -\mathbf{j}_{y_1} \sin \vartheta.$$

Moment tiažovej sily  $\mathbf{G}$  po úprave bude

$$\mathbf{M} = -\mathbf{j}_{y_1} r_T G \sin \vartheta. \quad (2)$$

Porovnaním vzťahov (a), (b) dostaneme

$$(I_{z_1} - I_{x_1}) \dot{\psi}^2 \cos \vartheta + I_{z_1} \dot{\phi} \dot{\psi} - r_T G = 0.$$

Riešením tejto (kvadratickej) rovnice určíme veľkosti precesnej uhlovej rýchlosti

$$\dot{\psi}_{1,2} = \frac{-I_{z_1} \dot{\phi} \pm \sqrt{I_{z_1}^2 \dot{\phi}^2 + 4r_T G (I_{z_1} - I_{x_1}) \cos \vartheta}}{2(I_{z_1} - I_{x_1}) \cos \vartheta}.$$

Ak platí predpoklad, že  $\dot{\psi} \ll \dot{\phi}$ , potom sa v riešení rovnice môžu zanedbať veľmi malé členy  $\dot{\psi}^2$  a porovnaním momentov pre precesnú uhlovú rýchlosť bude

$$\dot{\psi} = \frac{Gr_T}{I_{z_1} \dot{\phi}}.$$

Pre rotačný kužeľ platí

$$I_{z_1} = \frac{3}{10} mR^2, \quad r_T = \frac{3}{4} h.$$

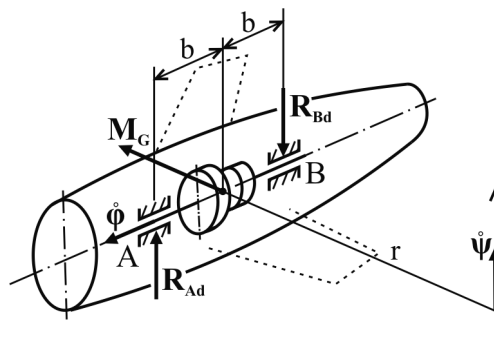
Potom po dosadení

$$\dot{\psi} = \frac{5}{2} \frac{gh}{R^2 \dot{\phi}}.$$

### **Príklad 7.3**

Lietadlo sa pohybuje horizontálne a zatáča. Os turbíny jeho motora je totožná s pozdĺžnou osou lietadla. Určte zložky reakcií v ložiskách turbíny, ktoré vznikajú v dôsledku gyroskopického efektu, ak otáčky turbíny sú  $n$ , rýchlosť lietadla  $v$ , polomer zatáčky  $r$ , moment zotrvačnosti rotora turbíny  $I$ , vzdialenosť ložísk turbíny  $2b$ .

Dané hodnoty:  $n = 600 \text{ s}^{-1}$ ,  $v = 1300 \text{ km.hod}^{-1}$ ,  $r = 1000 \text{ m}$ ,  $I = 14,3 \text{ kgm}^2$ ,  $2b = 1,2 \text{ m}$



**Obr.7.3**

## 1. Uvoľnenie

Dodatočné (dynamické) reakcie v ložiskách  $R_{Ad}$ ,  $R_{Bd}$  vzniknú v dôsledku pôsobenia gyroskopického momentu  $M_G$ . Turbína vykonáva vlastnú rotáciu okolo pozdĺžnej osi lietadla uhlovou rýchlosťou  $\dot{\phi}$  a lietadlo sa otáča v zákrute uhlovou rýchlosťou  $\dot{\psi}$  okolo osi kolmej na rovinu zátačky.

## 2. Dynamické pohybové rovnice

Gyroskopický moment je

$$\mathbf{M}_G = I \dot{\phi} \times \dot{\psi},$$

kde  $\dot{\phi} = 2\pi n$  je uhlová rýchlosť rotora turbíny,

$\dot{\psi} = \frac{v}{r}$  je precesná uhlová rýchlosť (v zatáčke).

Vektory  $\dot{\phi}$  a  $\dot{\psi}$  sú na seba kolmé, potom veľkosť gyroskopického momentu je

$$M_G = I \dot{\phi} \dot{\psi} = I 2\pi n \frac{v}{r} \Rightarrow M_G = 19\,467 \text{ Nm.}$$

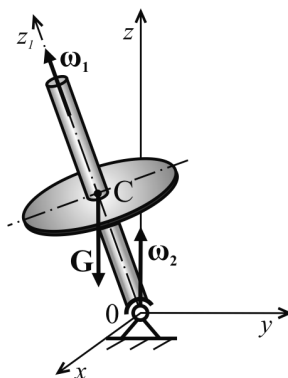
Dodatočné (dynamické) reakcie v ložiskách turbín sú

$$R_{Ad} = R_{Bd} = \frac{M_G}{2b} = 16\,222 \text{ N.}$$

### Príklad 7.4

Vypočítajte uhlovú rýchlosť pri precesnom pohybe gyroskopu, ak uhlová rýchlosť vlastnej rotácie je  $\omega_1$ , jeho tiaž  $G$ , moment zotrvačnosti k vlastnej osi rotácie  $I_{z_1}$ , vzdialenosť ťažiska a centra sférického pohybu je  $\overline{OC}$ .

Dané hodnoty:  $\omega_1 = 150 \text{ rads}^{-1}$ ,  $G = 10 \text{ N}$ ,  $I_{z_1} = 0,005 \text{ kgm}^2$ ,  $\overline{OC} = 0,04 \text{ m}$



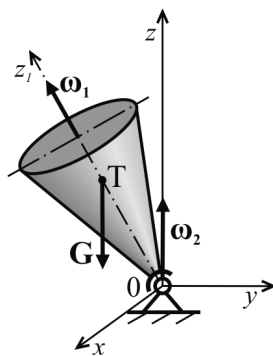
Obr. 7.4

(0,5333 rads<sup>-1</sup>)

### **Príklad 7.5**

Homogénny rotačný kužeľ sa otáča okolo osi  $z_1$  uhlovou rýchlosťou  $\omega_1$  a zároveň vykonáva precesnú rotáciu okolo osi  $z$  uhlovou rýchlosťou  $\omega_2$ . Medzi vektormi  $\omega_1$  a  $\omega_2$  je uhol  $\vartheta$ . Vypočítajte veľkosť momentu sily tiaže kužeľa  $G$  k bodu  $O$ , ak moment zotrvačnosti je  $I_{z_1}$ .

Dané hodnoty:  $\omega_1 = 100 \text{ rads}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 1,4 \text{ rads}^{-1}$ ,  $\vartheta = 5^\circ$ ,  $I_{z_1} = 0,001 \text{ kgm}^2$



Obr. 7.5

$(1,22 \cdot 10^{-2} \text{ Nm})$

### **Príklad 7.6**

Zotrvačník sa otáča uhlovou rýchlosťou  $\omega_1$ , pričom súčasne koná precesný rotačný pohyb uhlovou rýchlosťou  $\omega_2$ . Vypočítajte moment zotrvačnosti zotrvačníka k jeho vlastnej osi rotácie  $z_1$ , ak tiaž zotrvačníka je  $G$  a vzdialenosť jeho ťažiska od centra sférického pohybu je  $\overline{OC}$ .

Dané hodnoty:  $\omega_1 = 200 \text{ rads}^{-1}$ ,  $\omega_2 = 2 \text{ rads}^{-1}$ ,  $G = 5 \text{ N}$ ,  $\overline{OC} = 0,1 \text{ m}$

$(1,25 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2)$

## 8 SKRUTKOVÝ POHYB TELESA

V technickej praxi sa vyskytuje taký pohyb telesa, pri ktorom sa teleso otáča okolo nepohyblivej osi a zároveň sa jeho ťažisko posúva v smere tejto osi (matica po skrutke a pod.).

V zložkovom tvare dynamické pohybové rovnice telesa, ktoré má v tomto prípade dva stupne voľnosti sú:

$$ma = F_o,$$

$$I\alpha = M_o,$$

kde  $m$  je hmotnosť telesa,

$a$  zrýchlenie ťažiska telesa pri jeho posuvnom pohybe v smere osi  $o$ ,

$\alpha = \dot{\omega}$  uhlové zrýchlenie pri rotačnom pohybe telesa,

$M_o$  zložka výsledného momentu vonkajších síl k osi  $o$ ,

$F_o$  veľkosť zložky výslednej vonkajšej sily v smere osi  $o$ .

V prípade skrutkového pohybu matice po skrutke platí podmienková rovnica medzi kinematickými veličinami rotačného a posuvného pohybu

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v}{\omega r} = \frac{h}{2\pi r} \quad \Rightarrow \quad v = \omega r \operatorname{tg} \beta,$$

kde  $r$  je stredný priemer závitu,

$\beta$  uhol stúpania závitu,

$h$  stúpanie závitu,

$v$  rýchlosť posuvného pohybu (matice),

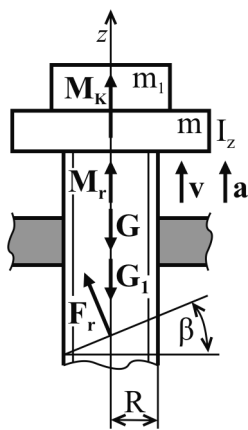
$\omega$  uhlová rýchlosť rotácie (matice).

### 8.1 Príklady (Skrutkový pohyb telesa)

#### Príklad 8.1

Bremeno o hmotnosti  $m_1$  je zdvíhané skrutkovým zdvihákom zrýchlením  $a$ . Určte veľkosť krútiaceho momentu  $M_k$ , ak hmotnosť pohyblivej časti zdviháka je  $m$ , moment zotrvačnosti  $I_z$ , stredný polomer závitu  $R$ , stúpanie závitu  $h$  a súčiniteľ šmykového trenia v závite  $f$ . Uhol stúpanie závitu je  $\beta$ .

Dané hodnoty:  $m_1, m, I_z, R, h, f, \beta, a$



Obr.8.1

### 1. Uvoľnenie

V osi skrutky (osi rotácie  $z$ ) ležia nositeľky síl tiaže pohyblivej a nepohyblivej časti zdviháka  $G_1$ ,  $G$ , nositeľky krútiaceho momentu  $M_k$ , ktorým zdvihák a bremeno dvíhame, odpor proti pohybu vyjadrený momentom  $M_r$  a reakcie  $F_r$  od nepohyblivej časti zdviháka.

### 2. Dynamické pohybové rovnice bremena sú

- pre posuvný pohyb:  $(m + m_1)a = F_r \cos(\beta + \varphi) - G - G_1$ ,
- pre rotačný pohyb:  $I_z \alpha = M_k - R F_r \sin(\beta + \varphi)$ ,

kde  $\varphi$  je trecí uhol.

Vzťah medzi posuvným pohybom ( $a$ ) a rotačným pohybom ( $\alpha$ ) je

$$a = \alpha R \tan \beta = \alpha \frac{h}{2\pi}.$$

Potom veľkosť krútiaceho momentu bude

$$M_k = I_z \frac{a}{R \tan \beta} + R [(m + m_1)a + (m + m_1)g] \tan(\beta - \varphi).$$

### **Príklad 8.2**

Vreteno o hmotnosti  $m_2$  vretenového lisu vykonáva skrutkový pohyb. Guľovým čapom je spojené s baranom. Napíšte dynamické pohybové rovnice skrutkového pohybu vretena, ak naň pôsobí hnací krútiaci moment  $M_h$ , súčiniteľ šmykového trenia v skrutke je  $f$ , stúpanie závitů je určené uhlom stúpania  $\beta$ .

Dané hodnoty:  $m_1, m_2, m_3, M_h, f, \beta, a, I_z, R$



## 1. Uvol'nenie

Vreteno vykonáva skrutkový pohyb, to znamená, že sa posúva dole konštantným zrýchlením  $a$  a otáča sa konštantným uhlovým zrýchlením  $\alpha$ .

V osi rotácie  $z$  ležia nositeľky síl vlastných tiaží, zložka väzbovej reakcie rámu v smere osi  $z$   $F_{rz}$ , reakcia od barana  $B$ , hnací krútiaci moment  $M_h$ , moment od väzbovej reakcie  $F_R$  medzi vretenom a rámom  $M_r$ , moment čapového trenia  $M_\epsilon$ .

## 2. Dynamické pohybové rovnice (DPR) vretena sú

$$m_2 a = G_2 + F_{rz} + B, \quad (1)$$

$$I_z \alpha = M_b - F_{rz} R \tan(\beta - \phi) - Br_{\dot{\phi}} f_{\dot{\phi}}, \quad (2)$$

$$m_3 a = G_3 - B, \quad (3)$$

kde  $R$  je stredný polomer závit,

$\varphi$       trecí uhol,

$r_{\check{c}}, f_{\check{c}}$  sú charakteristické rozmery v čape.

Medzi posuvným pohybom vretena ( $a$ ) a rotačným pohybom vretena ( $\alpha$ ) je vzťah

$$M_{\check{c}} = Br_{\check{c}} f_{\check{c}},$$

$$a = \alpha R \operatorname{tg} \beta.$$

Potom veľkosť hnacieho momentu bude

$$M_h = \left[ (m_2 + m_3) R \operatorname{tg}(\beta - \varphi) + m_3 f_{\tilde{c}} r_{\tilde{c}} + \frac{I_z}{R \operatorname{tg} \beta} \right] a - (G_2 + G_3) R \operatorname{tg}(\beta - \varphi) - G_3 r_{\tilde{c}} f_{\tilde{c}}.$$

## 9 SÚČASNÉ POHYBY TELESA

Ak sa hmotný objekt (teleso) pohybuje v tom istom čase tak, že jeho výsledný pohyb vieme rozložiť (opísať) viacerými pohybmi, hovoríme o súčasnóm pohybe. Ten môže byť zložený z viacerých pohybov.

Ak sú pohyby dva, potom výsledný pohyb je zložený z unášavého pohybu a z relatívneho pohybu.

Výsledné zrýchlenie  $i$ -teho hmotného bodu sústavy hmotných bodov je určené súčtom unášavého, relatívneho a Coriolisovho zrýchlenia

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_{iu} + \mathbf{a}_{ir} + \mathbf{a}_{ic}.$$

D'Alembertove zotrvačné sily sú

- unášavá:  $\mathbf{D}_u = -m \mathbf{a}_u$ , resp.  $\mathbf{D}_u = \mathbf{F}_o + \mathbf{F}_u$ ,

$$\text{kde } \mathbf{F}_o = -m \mathbf{a}_n = -m \omega_n^2 \mathbf{r}_T, \quad \mathbf{F}_u = -m \mathbf{a}_t = -m \boldsymbol{\alpha}_u \times \mathbf{r}_T,$$

- relatívna:  $\mathbf{F}_r \equiv \mathbf{D}_r = -m \mathbf{a}_r$ ,

- Coriolisova:  $\mathbf{F}_c \equiv \mathbf{D}_c = -m \mathbf{a}_c$ .

Ak je známy (daný) unášavý pohyb, potom dynamické pohybové rovnice (DPR) pre relatívny pohyb sú

$$\sum m_i \mathbf{a}_{ir} = \sum \mathbf{F}_i + \mathbf{D}_{iu} + \sum \mathbf{F}_{ic},$$

$$\sum (\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_{ir}) = \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{D}_{iu}) + \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ic}).$$

Tieto DPR platia pre sústavu hmotných bodov. V prípade telesa sa sumácia zmení na integráciu.

Ak sú obidva pohyby rotačné s rovnobežnými osami rotácie, DPR majú tvar

$$m \mathbf{a}_{rT} = \sum \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_o + \mathbf{F}_u + \mathbf{F}_c,$$

$$I_T \boldsymbol{\alpha}_r = \sum \mathbf{M}_{iT} - I_T \boldsymbol{\alpha}_u.$$

Ak je unášavý pohyb rotačný a relatívny pohyb je posuvný, potom DPR sú

$$m \mathbf{a}_r = \sum \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_o + \mathbf{F}_u + \mathbf{F}_c,$$

$$\mathbf{0} = \sum \mathbf{M}_{iT} - I_T \boldsymbol{\alpha}_u.$$

Ak je unášavý pohyb posuvný a relatívny pohyb je rotačný, potom DPR sú

$$m \mathbf{a}_{rT} = \sum \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_o + \mathbf{F}_u.$$

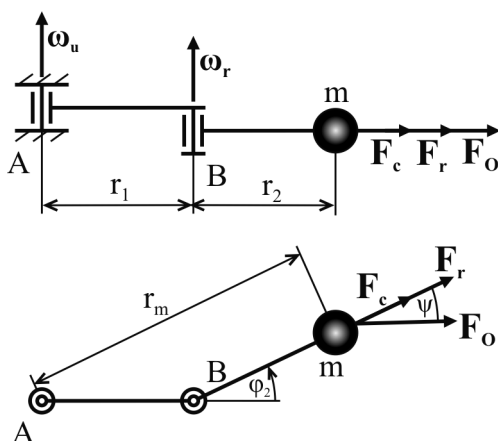
$$I_T \mathbf{a}_r = \sum \mathbf{M}_{iT}.$$



## 9.1 Príklady (Súčasné pohyby telesa)

### Príklad 9.1

Rameno o dĺžke  $r_1$  je uchytené otočne v rovinnom kĺbe A. Na jeho konci je kĺbom B uchytené ďalšie rameno o dĺžke  $r_2$ , na konci ktorého je bremeno o hmotnosti  $m$ . Ramená sa otáčajú uhlovými rýchlosťami  $\omega_u, \omega_r$ . Hmotnosti ramien zanedbajte. Určte silu, ktorá pôsobí na bremeno  $m$ .



Obr.9.1

#### 1. Uvoľnenie

Na bremeno pôsobia zotrvačné sily unášavého (rotačného) pohybu okolo kĺbu A, relatívneho (rotačného) pohybu okolo kĺbu B a zotrvačná Coriolisova sila.

#### 2. Dynamické pohybové rovnice

Výslednica zotrvačných síl je

$$\mathbf{F}_v = \mathbf{F}_o + \mathbf{F}_r + \mathbf{F}_c.$$

V zložkovom tvare je výsledná sila funkciou polohy

$$F_v = \sqrt{(F_r + F_c)^2 + F_o^2 + 2(F_r + F_c)F_o \cos \psi},$$

kde

$$F_r = mr_2 \omega_r^2, \quad F_o = mr_m \omega_u^2, \quad F_c = 2mr_2 \omega_u \omega_r,$$

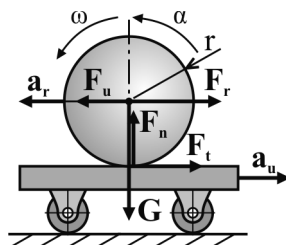
$$r_m = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 + 2rr_1 \cos \varphi_2}, \quad \psi = \arcsin \frac{r_1}{r_2} \sin \varphi_2, \quad \varphi_2 = \omega_r t.$$

### Príklad 9.2

Vozík sa rozbieha z pokoja stálym zrýchlením  $a_u$ . Na jeho plošine je voľne položený valec o hmotnosti  $m$ . Napíšte dynamické pohybové rovnice relatívneho pohybu valca na

plošine vozíka, ak súčiniteľ šmykového trenia medzi valcom a plošinou je  $f$ . Valivé odpory zanedbajte.

Dané hodnoty:  $a_u, m, f, r$



Obr.9.2

### 1. Uvoľnenie

V ťažisku valca pôsobí sila jeho tiaže  $G$ , zotrvačná sila unášaného pohybu  $F_u$ , v mieste dotyku valca s vozíkom sú normálová ( $F_n$ ) a tangenciálna zložka ( $F_t$ ) šmykového odporu plošiny.

2. Dynamická pohybová rovnica (DPR) relatívneho pohybu valca voči plošine je

$$\begin{aligned} ma_r &= ma_u - F_t, \\ 0 &= F_n - G, \\ \alpha I &= F_t r. \end{aligned} \quad (1)$$

Podmienka, aby nenastalo prešmykovanie valca na plošine je

$$F_t \leq fF_n, \quad (2)$$

kinematickou podmienkou je

$$a_r = \alpha r, \quad (3)$$

pričom zotrvačná sila unášavého pohybu je

$$F_u = ma_u.$$

Z rovníc (1), (2) vyplynie

$$\begin{aligned} a_r \left( m + \frac{I}{r^2} \right) &= ma_u, \\ F_t = m(a_u - a_r) &= a_u \frac{mI}{I + mr^2} \leq fG, \end{aligned}$$

odkiaľ po úprave dostávame podmienku

$$a_u \leq \left( 1 + \frac{mr^2}{I} \right) g f,$$

pričom moment zotrvačnosti valca je  $I = \frac{1}{2} mr^2$ .

## 10 DYNAMIKA MECHANICKÝCH SÚSTAV

Z hľadiska mechaniky strojové zariadenie predstavuje zložitú mechanickú sústavu. Ak ju riešime z pohľadu dynamiky, tak ju nazývame aj dynamická sústava.

Zaujímajú nás parametre potrebné pri skúmaní dynamiky pohybu týchto sústav, t. j. údaje o silových, hmotnostných, kinematických veličinách a vzájomný prenos silových a kinematických veličín medzi členmi sústavy.

Členmi sústavy sú tuhé telesá, hmotné body. To predpokladá zjednodušenie, že členmi reálnej sústavy sú také konštrukčné prvky (časti), ktorých deformácia pri prevádzke je malá v porovnaní s rozmermi stroja.

Pohyblivé mechanické sústavy nazývame aj mechanizmy.

### 10.1 Metóda uvoľnenia

Ak potrebujeme v konkrétnej mechanickej sústave určiť kinematické veličiny, väzbové reakcie pre všetky členy sústavy, hovoríme o celkovej dynamickej analýze sústavy, a na to je vhodná metóda uvoľnenia.

Postup riešenia pri použití tejto metódy je:

#### 1. Uvoľnenie

Jednotlivé členy sústavy (telesá, hmotné body) uvoľníme z väzieb, väzby nahradíme reakciami, zakreslíme všetky pôsobiace sily. Pri neznámych silách si zvolíme ich orientácie.

Určíme, akými hmotnými objektmi (telesá, body) sú jednotlivé členy sústavy a aký pohyb vykonávajú. Na základe toho posúdime o akú sústavu ide a koľko má stupňov voľnosti.

#### 2. Dynamické pohybové rovnice (DPR)

Pre každý člen sústavy píšeme osobitne DPR vo zvolenej súradnicovej sústave. Ich počet závisí od typu hmotného objektu (teleso, bod) a toho, či je pohyb priamočiary, rovinný alebo priestorový.

Potrebný počet rovníc na riešenie sústavy doplníme z dvoch zdrojov:

- zo vzťahov pre pasívne odpory (šmykové trenie, odpor pri valení, čapové trenie a pod.),
- z kinematických závislostí medzi členmi sústavy pri jej pohybe.

Ak z výsledkov riešenia (sústavy rovníc) dostaneme hľadanú veličinu so záporným znamienkom, potom jej skutočná orientácia je opačná, než sme zvolili.

Na zostavenie DPR môžeme využiť Newtonov zákon sily, resp. d'Alembertovu metódu zotrvačných síl a momentov.

## 10.2 Metóda redukcie hmotnostných a silových veličín

Častou úlohou v riešení pohybu mechanickej sústavy je určiť vzťah medzi pohybom jedného člena (napr. hnací motor) a iného člena (napr. bubon zdvíhacieho zariadenia), pričom nepotrebujeme určovať sily (reakcie) vo väzbách a pod.

Vtedy je výhodné použiť (relatívne) jednoduchšiu metódu redukcie hmotnostných a silových veličín.

Jej podstata spočíva v tom, že pri redukcii (prepočítaní) pohybu v pôvodnej sústave na pohyb v redukovanej sústave musia ostať zachované podstatné znaky (vlastnosti), ktoré charakterizujú dynamiku pohybu sústavy. Musia teda platiť nasledovné podmienky

$$E_k = E_{red}, \quad (1)$$

$$A = A_{red}, \quad (2)$$

$$P = P_{red}, \quad (3)$$

medzi kinetickou energiou  $E_k$ , prácou  $A$ , výkonom  $P$  v pôvodnej sústave a tými istými veličinami v redukovanej (prepočítanej) sústave.

Redukovať (prepočítat) pohyb pôvodnej sústavy môžeme na ľubovoľný člen sústavy, ktorý vykonáva buď posuvný pohyb alebo rotačný pohyb.

## 10.3 Lagrangeove rovnice II. druhu

Pre mechanickú sústavu s  $i$ -stupňami voľnosti (mechanizmus) sa dajú napísať Lagrangeove rovnice II. druhu v tvare

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} + \frac{\partial E_p}{\partial q_i} = Q_i + Q_{id}, \quad (4)$$

pre  $i = 1, 2, \dots, n$

kde  $q_i$  je zovšeobecnená súradnica,

$\dot{q}_i$  zovšeobecnená rýchlosť,

$E_k$  kinetická energia sústavy,

$E_p$  potenciálna energia sústavy,

$Q_i$  zovšeobecnená sila zodpovedajúca konzervatívnym silám (vratné sily, sily tiaže) a nekonzervatívnym silám (hnacie sily),

$Q_{id}$  zovšeobecnená sila zodpovedajúca jej tlmiacim (disipatívnym) silám.

S využitím Lagrangeových rovníc II. druhu vieme napísať toľko dynamických pohybových rovníc sústavy, koľko má sústava stupňov voľnosti.

Zovšeobecnené sily sa určujú s využitím virtuálnych pohybov a virtuálnych prác.

### 10.4 Princíp virtuálnych prác

Princíp virtuálnych prác je tiež známy ako d'Alembertov-Lagrangeov princíp alebo všeobecná rovnica dynamiky.

Ak väzby v mechanickej sústave sú ideálne, t. j. elementárna práca väzbových reakcií pri ľubovoľnej virtuálnej zmene polohy sa rovná nule, potom

$$Q_i = \sum \left( \mathbf{F}_{hi} \frac{\partial \mathbf{r}_{Ti}}{\partial q_i} + \mathbf{M}_{hTi} \frac{\partial \varphi_i}{\partial q_i} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

je zovšeobecnená sila zodpovedajúca zovšeobecnenej súradnici  $q_i$ .

Ak na sústavu s ideálnymi väzbami pôsobia len konzervatívne sily (tiaž resp. sily, ktoré sú funkciou polohy v silovom poli, vratné sily, atď.), potom zovšeobecnená sila je

$$Q_i = -\frac{\partial E_p}{\partial q_i},$$

kde  $E_p$  je potenciálna energia sústavy.

Princíp virtuálnych prác znamená, že virtuálna práca vonkajších a zotrvačných síl pôsobiacich na členy sústavy pri ľubovoľnej virtuálnej zmene polohy sústavy je rovná nule, t.j.

$$\delta A = \sum (\mathbf{F}_{hi} + \mathbf{F}_{ri} + \mathbf{F}_{zi}) \delta \mathbf{r}_{Ti} + \sum (\mathbf{M}_{hTi} + \mathbf{M}_{rTi} + \mathbf{M}_{zi}) \delta \varphi_i = 0, \quad (6)$$

kde  $\mathbf{F}_{hi}$  je vonkajšia sila pôsobiaca na i-ty člen sústavy,

$\mathbf{F}_{ri}$  väzbová reakcia pôsobiaca na i-ty člen sústavy,

$\mathbf{F}_{zi}$  zotrvačná (d'Alembertova) sila i-teho člena sústavy,

$\mathbf{M}_{hTi}$  moment sily  $\mathbf{F}_{hi}$  vzhľadom na ťažisko i-teho telesa,

$\mathbf{M}_{rTi}$  moment väzbovej reakcie  $\mathbf{F}_{ri}$  vzhľadom na ťažisko,

$\delta \mathbf{r}_{Ti}$  virtuálne posunutie ťažiska,

$\delta\varphi_i$  virtuálne pootočené okolo ťažiska.

Rovnica (6) je vyjadrením princípu virtuálnych prác, princípu d'Alemberta-Lagrangea, resp. všeobecná rovnica dynamiky.

S využitím (6) vieme napísať toľko dynamických pohybových rovníc sústavy, koľko má sústava stupňov voľnosti.

### 10.5 Veta o zmene veľkosti kinetickej energie sústavy

Pohyb mechanickej sústavy sa deje v určitom časovom intervale, mení sa jej poloha, rýchlosť. Primerane ako pre hmotný bod, resp. sústavu hmotných bodov, platí zákon o zmene veľkosti kinetickej energie aj na mechanickú pohybovú sústavu

$$E_k - E_{ko} = A, \quad (7)$$

kde  $E_k$  je kinetická energia sústavy na konci časového intervalu, v ktorom skúmame jej pohyb,

$E_{ko}$  kinetická energia sústavy na začiatku časového intervalu,

$A$  práca aktívnych síl pôsobiacich na členy sústavy.

Pri výpočte kinetickej energie zvažujeme, čo sa pohybuje (teleso, hmotný bod), aký vykonáva pohyb (posuvný, rotačný, všeobecný). Podobne posudzujeme aj prácu všetkých síl pôsobiacich na všetky členy sústavy (t.j. smer pôsobiacich síl v porovnaní s pohybom člena, ich orientáciou a pod.).

S využitím (7) vieme napísať toľko dynamických pohybových rovníc sústavy, koľko má sústava stupňov voľnosti.

### 10.6 Príklady (Dynamika mechanických sústav)

#### Príklad 10.1

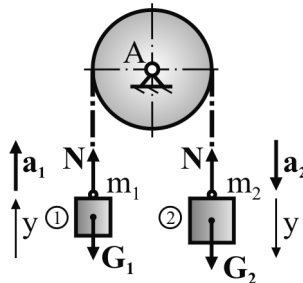
Lano je vedené cez kladku a na jeho koncoch sú uchytené bremená o tiažach  $G_1, G_2$ . Vypočítajte zrýchlenia, ktorými sa bremená pohybujú, ak ich pohyb je vyvolaný len silami ich tiaže. Pasívne odpory a hmotnosť lana a kladky zanedbajte.

Dané hodnoty:  $G_1 = 500 \text{ N}$ ,  $G_2 = 550 \text{ N}$

#### 1. Uvoľnenie

Na bremená pôsobia sily ich vlastnej tiaže  $G_1, G_2$ . Keďže lano považujeme za dokonale ohybné a nepredĺžiteľné, osová sila v ňom, bude podľa zákona akcie a reakcie

rovnako veľká, opačne orientovaná, pôsobiaca v osi lán na obidve bremená. Na bremená pôsobia priamkové silové sústavy, takže ich môžeme považovať za hmotné body, ktoré sa pohybujú priamočiaro, zrýchlene.



Obr. 10.1

2. Dynamické pohybové rovnice (DPR) hmotných bodov v smere pohybu s využitím Newtonovho zákona sily

$$\text{člen 1} \quad m_1 a_1 = \sum F_{iy} = -G_1 + N, \quad (1)$$

$$\text{člen 2} \quad m_2 a_2 = \sum F_{iy} = -N + G_2, \quad (2)$$

platí kinematická väzba medzi pohybmi členov

$$a_1 = a_2 = a. \quad (3)$$

Potom zo sústavy rovníc (1), (2), (3) vieme vypočítať

$$a_1 = a_2 = a = \frac{G_2 - G_1}{G_2 + G_1} g = 0,467 \text{ ms}^{-2},$$

$$N = m_1 a_1 + G_1 = 523,8 \text{ N}.$$

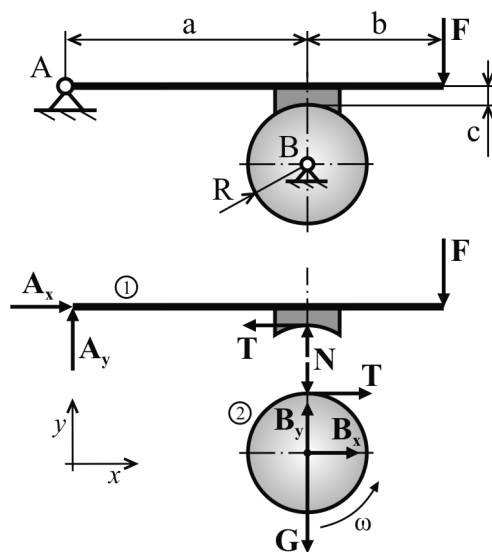
### **Príklad 10.2**

Plné tenké koleso o tiaži  $G$ , polomeru  $R$  sa otáča na začiatku otáčkami  $n_o$ . Vypočítajte počet otočení kolesa od začiatku brzdenia až do jeho zastavenia. Koeficient šmykového trenia medzi kolesom a brzdou je  $f$ . Tiaž páky a pasívne odpory v uložení kolesa zanedbajte.

Dané hodnoty:  $n_o = 50 \text{ min}^{-1}$ ,  $a = 2 \text{ m}$ ,  $b = 0,75 \text{ m}$ ,  $G = 800 \text{ N}$ ,  $R = 1 \text{ m}$ ,  $c = 0,4 \text{ m}$ ,  $F = 200 \text{ N}$ ,  $f = 0,2$

#### 1. Uvoľnenie

Na páku 1 pôsobí známa sila  $F$ , v kĺbe  $A$  sú zložky reakcie  $A_x, A_y$  a v brzdovej čeľusti zložky šmykového odporu  $T, N$ . Na koleso 2 pôsobí sila jeho tiaže  $G$ , zložky  $B_x, B_y$  reakcie v kĺbe  $B$  a v mieste dotyku brzdovej čeľuste a kolesa sú s ohľadom na zákon akcie a reakcie rovnako veľké ale opačne zložky šmykového odporu  $T, N$ .



Obr. 10.2

Na páku pôsobí všeobecná rovinná silová sústava, považujeme ju preto za teleso v rovine. Na koleso taktiež pôsobí všeobecná rovinná silová sústava, preto ho budeme takisto považovať za teleso v rovine. Koleso vykonáva rotačný pohyb okolo stálej osi rotácie.

Celok tvorí sústavu dvoch telies v rovine.

## 2. Dynamické pohybové rovnice (DPR)

Pre člen 1 sústavy (páku):

$$m_1 a_{1x} = A_x - T, \quad (1)$$

$$m_1 a_{1y} = A_y - F + N, \quad (2)$$

$$\alpha I_A = \sum (M_i)_A = -F(a+b) + Na - Tc. \quad (3)$$

Pre člen 2 sústavy (koleso):

$$m_2 a_{2x} = B_x + T, \quad (4)$$

$$m_2 a_{2y} = -G + B_y - N, \quad (5)$$

$$\alpha I = \sum (M_i)_B = -TR. \quad (6)$$

Ťažisko páky sa nepohybuje, teda platí  $a_{1x} = a_{1y} = 0$ , to isté platí pre ťažisko kolesa, teda  $a_{2x} = a_{2y} = 0$ .

Zanedbávame hmotnosť páky, teda jej moment zotrvačnosti  $I_A = 0$ .

Z Coulombovho vzťahu vieme

$$T = fN. \quad (7)$$



Po dosadení dostávame DPR v tvare

$$\begin{aligned}0 &= A_x - T, \\0 &= A_y - F + N, \\0 &= -F(a + b) + Na - Tc, \\0 &= B_x + T, \\0 &= A_y - F + N, \\ \alpha I &= -TR.\end{aligned}$$

Moment zotrvačnosti plného tenkého disku k osi, ktorá prechádza jeho ťažiskom a je kolmá na rovinu disku je

$$I = \frac{m_2 R^2}{2} = \frac{GR^2}{2g}.$$

Zo sústavy rovníc (1) až (7) vieme vypočítať

$$\begin{aligned}N &= 286,45 \text{ N}, & T &= 57,29 \text{ N}, \\B_x &= -57,29 \text{ N}, & B_y &= 1086,45 \text{ N}, \\A_x &= 57,29 \text{ N}, & A_y &= -86,45 \text{ N}, \\ \alpha &= -1,405 \text{ rads}^{-2}.\end{aligned}$$

Znamienka mínus vo výsledkoch hovoria o tom, že skutočná orientácia veličín je opačná, než sme predpokladali ( $A_x, B_x, \alpha$ ). Koleso sa otáča tak, ako je naznačená orientácia uhlovej rýchlosti  $\omega$  na obrázku, ale spomalene, teda brzdí.

Pre rovnomerne spomalený rotačný pohyb platí

$$\begin{aligned}-\alpha &= \frac{d\omega}{dt} = \text{konštanta}, & \omega &= \frac{d\varphi}{dt}, \\ -\alpha \int_0^t dt &= \int_{\omega_o}^{\omega} d\omega, & \omega &= \omega_o - \alpha t, \\ -\alpha t &= -\omega_o + \omega, & \int_0^{\varphi} d\varphi &= \int_0^t (\omega_o - \alpha t) dt, \\ & & \varphi &= \omega_o t - \alpha \frac{t^2}{2},\end{aligned}$$

kde uhol  $\varphi$  je uhol otočenia kolesa.

Ak dosadíme za  $\omega_o = \frac{2\pi n_o}{60}$ ,  $\varphi = 2\pi n$ , kde  $n$  je počet otočení kolesa, potom

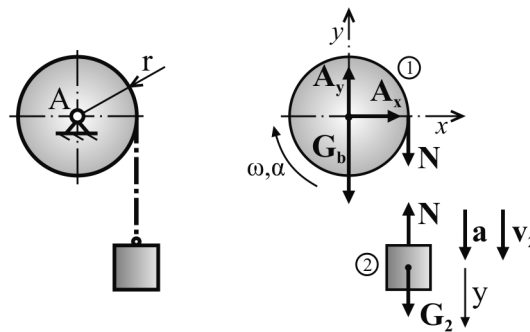
$$n = \frac{\pi n_o^2}{120 \cdot 30 \cdot \alpha} = 1,55 \text{ otáčky}.$$

Teda koleso sa od začiatku brzdenia až do jeho zastavenia otočilo 1,55 krát.

### **Príklad 10.3**

Člen 2 o tiaži  $G$  rovinnej sústavy je lanom spojený s bubnom o tiaži  $G_b$  a polomere  $r$ . Sústava sa pohybuje pod vplyvom vlastných tiaží. Vypočítajte veľkosť sily v lane a zrýchlenia obidvoch členov sústavy. Pasívne odpory zanedbajte.

Dané hodnoty:  $G = 1000 \text{ N}$ ,  $G_b = 150 \text{ N}$ ,  $r = 10 \text{ cm}$



**Obr. 10.3**

#### **a) Metóda uvoľnenia**

##### **1. Uvoľnenie**

Na bubon (člen 1 sústavy) pôsobí sila jeho tiaže  $G_b$ , zložky reakcie v kĺbe  $A$  a osová sila v lane  $N$ . Tieto sily tvoria všeobecnú rovinnú silovú sústavu, takže bubon budeme považovať za teleso v rovine, ktoré koná rotačný pohyb okolo stálej osi rotácie, zrýchlený.

Na bremeno (člen 2 sústavy) pôsobí sila jeho tiaže  $G$  a osová sila v lane  $N$ , pričom pri jej zakreslení rešpektujeme platnosť zákona akcie a reakcie vo vnútornej väzbe medzi členmi sústavy. Na bremeno pôsobí priamková silová sústava, takže ho môžeme považovať za hmotný bod pohybujúci sa priamočiari, zrýchlene.

Celok tvorí sústavu telesa a hmotného bodu v rovine.

##### **2. Dynamické pohybové rovnice (DPR) sústavy**

Pre člen 1 (bubon) vieme napísať 3 lineárne nezávislé DPR:

$$m_b a_x = \sum F_{ix} = A_x, \quad (1)$$

$$m_b a_y = \sum F_{iy} = A_y - G_b - N, \quad (2)$$

$$\alpha I = \sum (M_i)_A = Nr, \quad (3)$$

kde  $a_x = a_y = 0$  pretože ťažisko člena 1 sa nepohybuje a moment zotrvačnosti bubna je

$$I = \frac{m_b r^2}{2} = \frac{G_b r^2}{2g}.$$

Pre člen 2 (bremeno) vieme napísať 1 lineárne nezávislú DPR:

$$ma = \sum F_{iy} = G - N. \quad (4)$$

V rovniciach (1) až (4) je päť neznámych. Ak využijeme kinematickú závislosť medzi pohybmi bubna a bremena, ktorá je určená vzťahom

$$a = \alpha r, \quad (5)$$

potom zo sústavy rovníc (1) až (5) vieme vypočítať

$$\alpha = \frac{G}{\frac{r}{g} \left( \frac{G_b}{2} + G \right)} = 91,255 \text{ rads}^{-2},$$

$$a = \alpha r = 9,125 \text{ ms}^{-2},$$

$$N = G \left( 1 - \frac{\alpha r}{g} \right) = 69,76 \text{ N};$$

$$A_x = 0, \quad A_y = G_b + N = 219,76 \text{ N}.$$

#### b) Metóda redukcie hmotnostných a silových veličín

Pre použitie tejto metódy upravíme zadanie. Budeme počítať len zrýchlenia členov 1 a 2 sústavy.

##### 1. Uvoľnenie

Pri uvoľnení postupujeme rovnako ako pri predchádzajúcom riešení príkladu (obr.10.3).

Ktoré sily sú aktívne, resp. neaktívne, si vysvetlíme pri písaní dynamických pohybových rovníc.

##### 2. Dynamické pohybové rovnice (DPR) sústavy

Ak chceme redukovať (prepočítať) pohyb pôvodnej sústavy na pohyb redukovanej sústavy, musí platiť

$$E_k = E_{k,red}, \quad (1)$$

$$A = A_{red}, \quad (2)$$

$$P = P_{red}, \quad (3)$$

kde na ľavých stranách rovníc je kinetická energia  $E_k$ , práca  $A$ , výkon  $P$  v pôvodnej sústave, na pravých stranách tie isté veličiny v redukovanej sústave.

Redukujeme (prepočítame) pohyb pôvodnej sústavy na pohyb jedného jej člena, napr. na pohyb člena 2 (bremena), ktorý vykonáva priamočiary zrýchlený pohyb. Jeho DPR v smere osi  $y$  teda je

$$m_{red}a = F_{red}. \quad (4)$$

Redukované veličiny v rovnici (4) môžeme vyjadriť z podmienok (1) až (3), kde

$$\text{z rovnice (1) vyplynie} \quad E_k = E_{kred} = \frac{1}{2}m_{red}v_2^2 \quad \Rightarrow \quad m_{red} = \frac{2E_k}{v_2^2},$$

$$\text{z rovnice (3) vyplynie} \quad P = P_{red} = F_{red}v_2 \quad \Rightarrow \quad F_{red} = \frac{P}{v_2}.$$

Po dosadení do rovnice (4), DPR redukovanej sústavy na pohyb člena 2 bude

$$\frac{2E_k}{v_2^2}a = \frac{P}{v_2}, \quad (5)$$

kde  $E_k$  je kinetická energia v pôvodnej sústave ako funkcia rýchlosti  $v_2$  člena 2,

$P$  výkon v pôvodnej sústave ako funkcia rýchlosti  $v_2$  člena 2.

Kinetická energia  $E_k$  v pôvodnej sústave vo funkcii rýchlosti člena 2:

$$E_k = \sum E_{k_i} = E_{k_1} + E_{k_2},$$

$$E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{G_b}{g}r^2\left(\frac{v_2}{r}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{G}{g}v_2^2.$$

Keďže  $v_2 = \omega r$ , potom

$$E_k = \frac{v_2^2}{2g}\left(G + \frac{G_b}{2}\right).$$

Výkon síl pôsobiach na členy sústavy vo funkcii rýchlosti člena 2 je daný súčtom:

$$P = \sum P_i = P_1 + P_2.$$

Keďže sily  $G_b, A_x, A_y$  pôsobia v nepohyblivom bode, nemajú výkon a preto platí

$$P_1 = P_{G_b} + P_{A_x} + P_{A_y} + P_N = Nv_2,$$

$$P_2 = P_G + P_N = Gv_2 - Nv_2.$$

Sila  $N$  je vo vnútornej väzbe, preto s ohľadom na zákon akcie a reakcie, je výkon tejto sily na jednom člene  $+Nv_2$  a na susednom člene  $-Nv_2$ . Potom výkon síl pôsobiach na sústavu je

$$P = Gv_2.$$

Po dosadení výsledných vzťahov  $E_k$  a  $P$  do rovnice (5) bude DPR redukovanej sústavy na pohyb člena 2

$$\frac{2\frac{v_2^2}{2g}\left(G + \frac{G_b}{2}\right)}{v_2^2}a = \frac{Gv_2}{v_2},$$

odkiaľ po úprave dostávame

$$a = \frac{Gg}{G + \frac{G_b}{2}} = 9,125 \text{ ms}^{-2},$$

$$\alpha = \frac{a_2}{r} = 91,255 \text{ rads}^{-2}.$$

Ak budeme redukovat' (prepočítavať) pohyb pôvodnej sústavy na pohyb člena 1, ktorý vykonáva rotačný pohyb okolo stálej osi rotácie, potom DPR redukovanej sústavy bude

$$\alpha I_{red} = M_{red}. \quad (6)$$

Redukované veličiny v rovnici (6) môžeme vyjadriť z podmienok (1) až (3), kde

$$\text{z rovnice (1) vplynie } E_k = E_{kred} = \frac{1}{2} I_{red} \omega^2 \Rightarrow I_{red} = \frac{2E_k}{\omega^2},$$

$$\text{z rovnice (3) vplynie } P = P_{red} = M_{red} \omega \Rightarrow M_{red} = \frac{P}{\omega}.$$

Po dosadení do rovnice (6), DPR redukovanej sústavy na pohyb člena 2 bude

$$\alpha \frac{2E_k}{\omega^2} = \frac{P}{\omega}, \quad (7)$$

kde  $E_k$  je kinetická energia v pôvodnej sústave ako funkcia uhlovej rýchlosti  $\omega$ ,

$P$  výkon v pôvodnej sústave ako funkcia uhlovej rýchlosti  $\omega$ .

Kinetická energia  $E_k$  v pôvodnej sústave vo funkcii uhlovej rýchlosti  $\omega$  člena 1 určíme zo vzťahu pre  $E_k$ , ktorý bol odvodený pri predchádzajúcom riešení

$$E_k = \frac{v_2^2}{2g} \left( G + \frac{G_b}{2} \right) = \frac{\omega^2 r^2}{2g} \left( G + \frac{G_b}{2} \right).$$

Výkon síl pôsobiacich na členy sústavy vo funkcii uhlovej rýchlosti  $\omega$  člena 1 určíme zo vzťahu pre  $P$ , ktorý bol takisto odvodený pri predchádzajúcom riešení

$$P = Gv_2 = G\omega r.$$

Po dosadení do rovnice (7) bude DPR redukovanej sústavy na pohyb člena 1

$$\frac{2 \frac{\omega^2 r^2}{2g} \left( G + \frac{G_b}{2} \right)}{\omega^2} \alpha = \frac{G\omega r}{\omega},$$

odkiaľ po úprave dostávame

$$\alpha = \frac{Gg}{r\left(G + \frac{G_b}{2}\right)} = 91,255 \text{ rads}^{-2},$$
$$a = \alpha r = 9,125 \text{ ms}^{-2}.$$

c) Langrangeove rovnice II. druhu

Upravíme zadanie úlohy. Vypočítajte zrýchlenia členov 1,2 sústavy.

1. Uvoľnenie

Pre uvoľnenie použijeme obr.10.3, avšak väzby predpokladáme ideálne.

2. Dynamická pohybová rovnica (DPR)

Langrangeovu rovnicu II. druhu pre tento prípad (kedy zanedbávame pasívne odpory) môžeme napísať v tvare

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial E_k}{\partial q_1} = Q_1, \quad (8)$$

kde  $E_k$  je kinetická energia sústavy,

$Q_1$  zovšeobecnená sila,

$q_1$  zovšeobecnená súradnica,

$\dot{q}_1$  zovšeobecnená rýchlosť.

Za zovšeobecnenú súradnicu zvolíme  $q_1 = y_2$ , čo je posuv člena 2 v smere osi  $y$ . Jej deriváciou podľa času dostávame zovšeobecnenú rýchlosť  $\dot{q}_1 = \dot{y}_2$ .

Kinetická energia sústavy  $E_k$  vo funkcii rýchlosti člena 2 (pozri predchádzajúce riešenie) je určená vzťahom:

$$E_k = \frac{v_2^2}{2g} \left( G + \frac{G_b}{2} \right) = \frac{\dot{y}_2^2}{2g} \left( G + \frac{G_b}{2} \right),$$

odkiaľ

$$\frac{\partial E_k}{\partial y_2} = 0,$$
$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}_2} = \frac{\dot{y}_2}{g} \left( G + \frac{G_b}{2} \right),$$
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}_2} = \frac{\ddot{y}_2}{g} \left( G + \frac{G_b}{2} \right).$$

Na vyjadrenie zovšeobecnenej sily  $Q_1$  použijeme virtuálne práce síl pôsobiacich na členy sústavy vo funkcii virtuálneho posunutia  $\delta y_2$  člena 2. Keďže sila  $N$  je vo vnútornej väzbe, kde platí zákon akcie a reakcie, a sily  $G_b, A_x, A_y$  pôsobia v nepohyblivom bode, čiže nekonajú prácu, potom virtuálna práca síl v sústave je

$$\delta A = \delta A_G + \delta G_b + \delta A_x + \delta A_y + \delta N = G \delta y_2,$$

a zovšeobecnená sila

$$Q_1 = G.$$

Po dosadení odvodených vzťahov do rovnice (8) bude DPR sústavy

$$\frac{\ddot{y}_2}{g} \left( G + \frac{G_b}{2} \right) = G,$$

odkiaľ po úprave dostávame

$$\ddot{y}_2 = a = \frac{Gg}{G + \frac{G_b}{2}} = 9,125 \text{ ms}^{-2}.$$

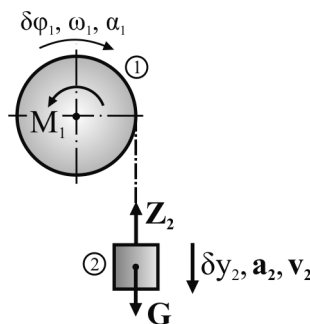
$$\alpha_1 = \frac{a}{r} = 91,255 \text{ rads}^{-2}.$$

#### d) Princíp virtuálnych prác. Princíp d'Alembert-Lagrange. Všeobecná rovnica dynamiky

Upravíme zadanie úlohy. Vypočítajte zrýchlenia členov 1, 2 sústavy

##### 1. Uvoľnenie

Väzby považujeme za ideálne, zakreslíme len aktívnu silu  $G$  vykonávajúcu prácu, zotrvačné d'Alembertove sily a momenty  $Z_2, M_1$ , ktoré prácu nevykonávajú a ktorých orientácia je opačná, ako sú veličiny zrýchlenia  $a_2, \alpha_1$ .



Obr. 10.4

##### 2. Dynamické pohybové rovnice (DPR) sústavy

DPR vyjadríme vo vzťahu na pohyb člena 2 sústavy, teda

$$\sum (m_i a_2 - F_i) \delta y_2 = 0 \quad (9)$$

kde  $m_i a_2$  sú zotrvačné účinky (sila  $Z_2$ , moment  $M_1$ ),

$F_i$  vonkajšie aktívne sily,

$\delta_{y_2}$  virtuálne posunutie člena 2 sústavy.

Zotrvačná (d'Alembertova) sila je

$$Z_2 = m a_2,$$

zotrvačný moment

$$M_1 = \alpha_1 I = \frac{a_2}{r} \frac{1}{2} \frac{G_b}{g} r^2 = \frac{G_b}{2g} a^2 r.$$

Po dosadení do rovnice (9) dostávame

$$G \delta_{y_2} - m a_2 \delta_{y_2} - \frac{G_b}{2g} a_2 r \delta \varphi_1 = 0,$$

kde virtuálne posunutie  $\delta_{y_2} = r \delta \varphi_1$ , takže po úprave bude mať DPR tvar

$$G - \frac{G}{g} a_2 - \frac{G_b}{2g} a_2 = 0.$$

odkiaľ potom

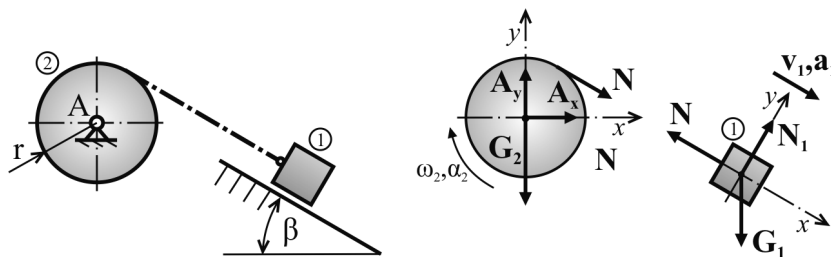
$$a_2 = \frac{Gg}{G + \frac{G_b}{2}} = 9,125 \text{ ms}^{-2},$$

$$\alpha_1 = \frac{a_2}{r} = 91,255 \text{ rad s}^{-2}.$$

#### **Príklad 10.4**

Rovinná sústava sa začne pohybovať z pokoja pod vplyvom vlastných tiaží. Vypočítajte dráhu člena 1 po čase  $t_1$  od začiatku pohybu. Pasívne odpory zanedbajte. Člen 1 považujte za hmotný bod.

Dané hodnoty:  $G_1 = 500 \text{ N}$ ,  $G_2 = 200 \text{ N}$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $r = 0,2 \text{ m}$ ,  $t_1 = 2 \text{ s}$



Obr. 10.5



## a) Metóda uvoľnenia

### 1. Uvoľnenie

Na člen 1 pôsobí sila jeho tiaže  $G_1$ , normálová reakcia naklonenej roviny  $N_1$  a osová sila v lane  $N$ . Tieto sily tvoria centrálnu rovinnú silovú sústavu, preto člen 1 môžeme považovať za hmotný bod, ktorý sa pohybuje priamočiarno zrýchlene.

Na člen 2 pôsobí sila jeho tiaže  $G_2$ , zložky  $A_x, A_y$  reakcie v ložisku  $A$ , sila v lane  $N$ , pri zakreslení ktorej rešpektujeme zákon akcie a reakcie vo vnútornej väzbe medzi členmi 1, 2. Sily pôsobiace na člen 2 tvoria všeobecnú rovinnú silovú sústavu, preto ho považujeme za teleso v rovine, pohybujúce sa rotačne okolo stálej osi rotácie prechádzajúcej bodom  $A$ , zrýchlene.

Celok tvorí rovinnú sústavu telesa a hmotného bodu.

### 2. Dynamické pohybové rovnice sústavy (DPR)

Pre člen 1 (hmotný bod v rovine) vieme napísať dve DPR

$$m_1 a_1 = \sum F_{ix}, \quad \frac{G_1}{g} a_1 = G_1 \sin \beta - N, \quad (1)$$

$$m_1 a_{1y} = \sum F_{iy}, \quad 0 = -G_1 \cos \beta + N_1. \quad (2)$$

Pre člen 2 (teleso v rovine) vieme napísať tri DPR

$$m_2 a_{2x} = \sum F_{ix}, \quad 0 = B_x + N \cos \beta, \quad (3)$$

$$m_2 a_{2y} = \sum F_{iy}, \quad 0 = B_y - G_2 - N \sin \beta, \quad (4)$$

$$\alpha_2 I_2 = \sum (M_i)_A, \quad \alpha_2 \frac{1}{2} m_2 r^2 = N r. \quad (5)$$

Závislosť medzi kinematickými veličinami členov 1, 2 je vyjadrená vzťahom

$$a_1 = \alpha_2 r. \quad (6)$$

Zo sústavy rovníc (1) až (6) vieme vypočítať

$$N = \frac{\alpha_2 G_2 r}{2g} = 41,65 \text{ N}, \quad N_1 = G_1 \cos \beta = 433,01 \text{ N},$$

$$A_x = -N \cos \beta = -36,07 \text{ N}, \quad A_y = G_2 + N \sin \beta = 429,76 \text{ N},$$

$$\alpha_2 = \frac{g G_1 \sin \beta}{2r \left( \frac{G_1}{2} + \frac{G_2}{4} \right)} = 20,43 \text{ rads}^{-2},$$

$$a_1 = \frac{g G_1 \sin \beta}{2 \left( \frac{G_1}{2} + \frac{G_2}{4} \right)} = 4,08 \text{ ms}^{-2}.$$

Pre dráhu rovnomerne zrýchleného priamočiareho pohybu člena 1 platí

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{dv_1}{dt}, & v_1 &= \frac{ds_1}{dt}, \\ a_1 \int_0^{t_1} dt &= \int_0^{v_1} dv_1, & \frac{ds_1}{dt} &= a_1 t_1, \\ a_1 t_1 &= v_1, & \int_0^{x_1} ds_1 &= \int_0^{t_1} a_1 t_1 dt, \\ x_1 &= \frac{a_1 t_1^2}{2} = 8,16 \text{ m}. \end{aligned}$$

## b) Metóda redukcie hmotnostných a silových veličín

### 1. Uvoľnenie

Použijeme obr. 10.5

### 2. Dynamické pohybové rovnice (DPR) sústavy

Ak chceme redukovať (prepočítať) pohyb pôvodnej sústavy na pohyb člena redukovanej sústavy, musia byť splnené podmienky

$$E_K = E_{Kred} \quad (1)$$

$$A = A_{red} \quad (2)$$

$$P = P_{red} \quad (3)$$

kde na ľavých stranách rovníc je kinetická energia  $E_K$ , práca  $A$ , výkon  $P$  v pôvodnej sústave, na pravých stranách tie isté veličiny v redukovanej sústave.

Pohyb pôvodnej sústavy redukuje (prepočítame) na pohyb napr. člena 1, čo je hmotný bod vykonávajúci priamočiary zrýchlený pohyb.

Potom DPR redukovanej sústavy na pohyb člena 1 bude

$$m_{red} a_1 = F_{red}. \quad (4)$$

$$\text{Z rovnice (1) vyplynie } E_K = E_{Kred} = \frac{1}{2} m_{red} v_1^2 \Rightarrow m_{red} = \frac{2E_K}{v_1^2}.$$

$$\text{Z rovnice (2) vyplynie } A = A_{red} = F_{red} s_1 \Rightarrow F_{red} = \frac{A}{s_1}.$$

Po dosadení do (4) bude DPR redukovanej sústavy

$$\frac{2E_K}{v_1^2} a_1 = \frac{A}{s_1}, \quad (5)$$

kde  $E_K$  je kinetická energia v pôvodnej sústave ako funkcia rýchlosti  $v_1$  člena 1,

$P$  výkon v pôvodnej sústave ako funkcia rýchlosti  $v_1$  člena 1,

Kinetická energia  $E_K$  v pôvodnej sústave vo funkcii rýchlosti člena 1 je daná súčtom

$$E_K = \sum E_{Ki} = E_{K1} + E_{K2},$$

kde

$$E_{K1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{G_1}{g} v_1^2,$$

$$E_{K2} = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{G_2}{g} r^2 \frac{v_1^2}{r^2} = \frac{1}{4} \frac{G_2}{g} v_1^2.$$

Keďže  $v_1 = \omega_2 r$ , potom

$$E_K = \frac{v_1^2}{g} \left( \frac{G_1}{2} + \frac{G_2}{4} \right).$$

Práca síl pôsobiacich na členy pôvodnej sústavy je

$$A = \sum A_i = A_1 + A_2,$$

Keďže sila  $N_1$  je kolmá na smer pohybu a sily  $G_2, A_{Ax}, A_{Ay}$  pôsobia v nepohyblivom bode, ich práca je nulová. Sila  $N$  je vo vnútornej väzbe, preto s ohľadom na zákon akcie a reakcie, sa jej výsledná práca takisto rovná nule. S ohľadom na uvedené platí

$$A_1 = A_{G1} + A_{N1} + A_N = s_1 G_1 \sin \beta,$$

$$A_2 = A_{G2} + A_{Ax} + A_{Ay} + A_N = 0.$$

Potom práca síl pôsobiacich v sústave bude

$$A = s_1 G_1 \sin \beta.$$

Dosadením odvodených vzťahov do rovnice (5) dostávame DPR redukovanej sústavy

$$\frac{2 \frac{v_1^2}{g} \left( \frac{G_1}{2} + \frac{G_2}{4} \right)}{v_1^2} a_1 = \frac{s_1 G_1 \sin \beta}{s_1},$$

odkiaľ po úprave získavame vzťah pre výpočet zrýchlenia člena 1

$$a_1 = \frac{G_1 g \sin \beta}{2 \left( \frac{G_1}{2} + \frac{G_2}{4} \right)},$$

ktorý môžeme porovnať s riešením v prípade a).

c) Lagrangeove rovnice II. druhu

1. Uvoľnenie

Použijeme obr. 10.5

2. Dynamická pohybová rovnica (DPR)

Langrangeovu rovnicu II. druhu pre tento prípad (kedy zanedbávame pasívne odpory) môžeme napísať v tvare

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_K}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_K}{\partial q_i} = Q_i, \quad (1)$$

kde  $q_i$  je zovšeobecnená súradnica,

$\dot{q}_i$  zovšeobecnená rýchlosť,

$E_K$  kinetická energia sústavy,

$Q_i$  zovšeobecnená sila.

Za zovšeobecnenú súradnicu zvolíme posuv  $s_1$  člena 1. Potom

$$q_1 = s_1, \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_1 = \dot{s}_1.$$

Kinetická energia sústavy vo funkcii zovšeobecnenej rýchlosti  $\dot{s}_1$  člena 1 (pozri riešenie a) príkladu) je určená vzťahom

$$E_k = \frac{v_1^2}{g} \left( \frac{G_1}{2} + \frac{G_2}{4} \right) = \frac{\dot{s}_1^2}{g} \left( \frac{G_1}{2} + \frac{G_2}{4} \right),$$

odkiaľ

$$\frac{\partial E_k}{\partial s_1} = 0,$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{s}_1} = \frac{2\dot{s}_1}{g} \left( \frac{G_1}{2} + \frac{G_2}{4} \right),$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{s}_1} = \frac{2\ddot{s}_1}{g} \left( \frac{G_1}{2} + \frac{G_2}{4} \right).$$

Na určenie zovšeobecnej sily  $Q_1$  využijeme virtuálnu prácu síl pôsobiacich na členy sústavy vo funkcii virtuálneho posunutia  $\delta s_1$  člena 1. Keďže sila tiaže  $G_1$  je jediná, ktorá koná prácu, platí

$$\delta A = G_1 \sin \beta \delta s_1.$$

Práce ostatných síl sú rovné nule (pozri riešenie b) príkladu). Potom zovšeobecnená sila je

$$Q_1 = G \sin \beta.$$

Po dosadení do rovnice (1) bude DPR sústavy

$$\frac{2\ddot{s}_1}{g} \left( \frac{G_1}{2} + \frac{G_2}{4} \right) = G_1 \sin \beta,$$

odkiaľ po úprave získavame vzťah pre výpočet zrýchlenia člena 1

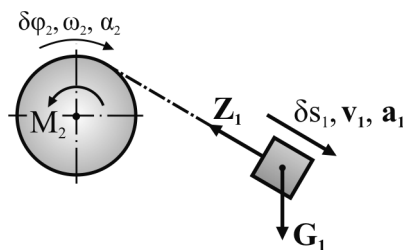
$$\ddot{s}_1 = a_1 = \frac{G_1 g \sin \beta}{2 \left( \frac{G_1}{2} + \frac{G_2}{4} \right)},$$

ktorý môžeme porovnať s riešeniami v prípadoch a), b).

#### d) Princíp virtuálnych prác. Princíp d'Alembert-Lagrange. Všeobecná rovnica dynamiky

##### 1. Uvoľnenie

V obrázku zakreslíme vonkajšie aktívne sily ( $G_1$ ), zotrvačné d'Alembertove sily a momenty ( $Z_1, M_1$ ), pričom ich orientácia je opačná ako orientácia zrýchlení.



Obr. 10.6

##### 2. Dynamická pohybová rovnica (DPR)

Princíp virtuálnych prác môžeme zapísať v tvare

$$\sum (m_i a_i - F_i) \delta x_i = 0, \quad (1)$$

kde  $\delta x_i$  sú virtuálne posunutia, v tomto prípade virtuálne posunutie  $\delta x_1$  člena 1,

$F_i$  vyjadruje vonkajšie aktívne sily ( $G_1$ ),

$m_i a_i$  vyjadruje zotrvačné účinky (silu  $Z_1$ , moment  $M_1$ ).

Pre zotrvačnú silu  $Z_1$  a zotrvačný moment  $M_1$  platí

$$Z_1 = m_1 a_1 = \frac{G_1}{g} a_1,$$

$$M_1 = \alpha_2 I_2 = \frac{a_1}{r} \frac{1}{2} \frac{G_2}{g} r^2 = \frac{G_2}{2g} a_1 r,$$

odkiaľ potom

$$a_2 = \frac{G g}{G + \frac{G_b}{2}} = 9,125 \text{ ms}^{-2},$$

$$\alpha_1 = \frac{a_2}{r} = 91,255 \text{ rads}^{-2}.$$

Po dosadení do rovnice (1) dostávame

$$G_1 \sin \beta \delta x_1 - \frac{G_1}{g} a_1 \delta x_1 - \frac{G_2}{2g} a_1 r \delta \varphi_2 = 0,$$

kde virtuálne posunutie  $\delta x_1 = r \delta \varphi_2$ , takže po úprave bude mať DPR tvar

$$-\frac{a_1}{g} \left( G_1 + \frac{G_2}{2} \right) = -G \sin \beta,$$

odkiaľ zrýchlenie člena 1

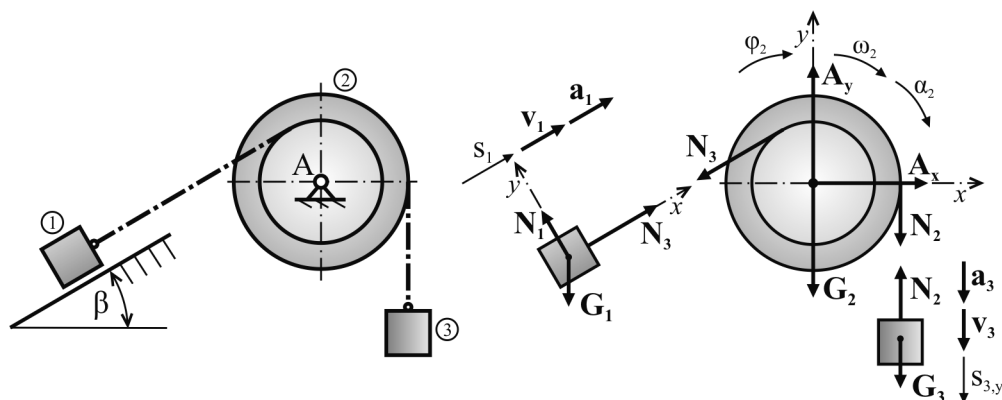
$$a_1 = \frac{g G_1 \sin \beta}{G_1 + \frac{G_2}{2}},$$

čo môžeme porovnať s riešeniami v prípadoch a), b), c).

### **Príklad 10.5**

Rovinná sústava sa začne pohybovať z pokoja pod vplyvom vlastných tiaží. Vypočítajte dráhu člena 1, ktorú prejde za čas  $t_1$  od začiatku pohybu. Pasívne odpory zanedbajte. Člen 1 považujte za hmotný bod.

Dané hodnoty:  $G_1 = 50 \text{ N}$ ,  $G_2 = 80 \text{ N}$ ,  $G_3 = 60 \text{ N}$ ,  $t_1 = 1,5 \text{ s}$ ,  $R = 0,6 \text{ m}$ ,  $r = 0,3 \text{ m}$ ,  $\beta = 40^\circ$



**Obr. 10.7**

#### **1. Uvoľnenie**

Na člen 1 pôsobí sila tiaže  $G_1$ , normálová zložka reakcie naklonenej roviny  $N_1$  a osová sila v lane  $N_3$ . Sily tvoria centrálnu rovinnú silovú sústavu, preto môžeme člen 1 považovať za hmotný bod v rovine, ktorý sa pohybuje priamočiarno, zrýchlene.

Na člen 2 pôsobí sila tiaže  $G_2$ , zložky reakcie  $A_x, A_y$  v kĺbe  $A$ , osová sila v lane  $N_3$  (pri jej zakreslení rešpektujeme zákon akcie a reakcie vo vnútornej väzbe medzi členmi 1, 2 sústavy). Sily tvoria všeobecnú rovinnú silovú sústavu, člen 2 preto považujeme za teleso v rovine, ktoré sa pohybuje rotačne okolo stálej osi rotácie prechádzajúcej bodom  $A$ , zrýchlene.

Na člen 3 pôsobí sila tiaže  $G_3$ , sila v lane  $N_2$  ako vnútorná väzba medzi členmi 2, 3. Sily tvoria priamkovú silovú sústavu, takže člen 3 považujeme za hmotný bod, ktorý sa pohybuje priamočiarno, zrýchlene.

Celok tvorí rovinnú sústavu pozostávajúcu z dvoch hmotných bodov a telesa.

## 2. Dynamické pohybové rovnice (DPR) sústavy

Pre člen 1 vieme zapísať dve DPR

$$m_1 a_1 = \sum F_{ix} = N_3 - G_1 \sin \beta, \quad (1)$$

$$m_1 a_{1y} = \sum F_{iy} = N_1 - G_1 \cos \beta, \quad (2)$$

pričom  $a_{1y} = 0$ .

Pre člen 2 vieme napísať tri DPR

$$m_2 a_{2x} = \sum F_{ix} = A_x - N_3 \cos \beta, \quad (3)$$

$$m_2 a_{2y} = \sum F_{iy} = A_y - G_2 - N_2 - N_3 \sin \beta, \quad (4)$$

$$\alpha_2 I_2 = \sum (M_i)_A = N_2 R - N_3 r, \quad (5)$$

pričom  $a_{2x} = a_{2y} = 0$  a moment zotrvačnosti člena 2 je  $I_2 = \frac{m_2 R^2}{2} = \frac{G_2 R^2}{2g}$ .

Pre člen 3 vieme napísať jednu DPR

$$m_3 a_3 = \sum F_{iy} = G_3 - N_2. \quad (6)$$

Medzi pohybmi členov 1,2 a 2,3 platia kinematické závislosti:

$$a_1 = \alpha_2 r, \quad (7)$$

$$a_3 = \alpha_2 R. \quad (8)$$

Potom zo sústavy rovníc (1) až (8) vypočítame

$$\begin{aligned} N_1 &= G_1 \cos \beta = 38,3 \text{ N}, & a_3 &= \alpha_2 R = 3,83 \text{ ms}^{-2}, \\ a_1 &= \alpha_2 r = 1,915 \text{ ms}^{-2}, & N_2 &= -m_3 a_3 + G_3 = 36,57 \text{ N}, \\ N_3 &= \frac{N_2 R - I_2 \alpha_2}{r} = 41,9 \text{ N}, & A_x &= N_3 \cos \beta = 32,097 \text{ N}, \end{aligned}$$

$$A_y = G_2 + N_2 + N_3 \sin \beta = 143,5 \text{ N},$$

$$\alpha_2 = \frac{g(G_3 R - G_1 r \sin \beta)}{G_1 r^2 + R^2 \left( G_3 + \frac{G_2}{2} \right)} = 6,384 \text{ rads}^{-2}.$$

Dráhu člena 1, ktorý vykonáva priamočiary zrýchlený pohyb určíme

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt}, \quad v_1 = \frac{ds_1}{dt},$$

$$a_1 \int_0^{t_1} dt = \int_0^{v_1} dv_1, \quad \frac{ds_1}{dt} = a_1 t_1,$$

$$a_1 t_1 = v_1, \quad \int_0^{x_1} ds_1 = \int_0^{t_1} a_1 t_1 dt,$$

$$x_1 = \frac{a_1 t_1^2}{2} = 2,154 \text{ m}.$$

## b) Metóda redukcie hmotnostných a silových veličín

### 1. Uvoľnenie

Použijeme obr.10.7.

### 2. Dynamická pohybová rovnice (DPR) sústavy

Ak chceme redukovať (prepočítat) pohyb pôvodnej sústavy na pohyb zvoleného člena redukovanej sústavy, musia platiť podmienky

$$E_k = E_{kred}, \quad (1)$$

$$A = A_{red}, \quad (2)$$

$$P = P_{red}, \quad (3)$$

kde na ľavých stranách rovníc je kinetická energia  $E_k$ , práca  $A$ , výkon  $P$  v pôvodnej sústave, na pravých stranách tie isté veličiny v redukovanej sústave.

Redukujme (prepočítajme) pohyb pôvodnej sústavy napr. na pohyb člena 1, ktorý vykonáva priamočiary zrýchlený pohyb.

Potom DPR redukovanej sústavy na pohyb člena 1 bude

$$m_{red} a_1 = F_{red}. \quad (4)$$

$$\text{Z rovnice (1) vyplynie } E_k = E_{kred} = \frac{1}{2} m_{red} v_1^2 \Rightarrow m_{red} = \frac{2E_k}{v_1^2}.$$

$$\text{Z rovnice (3) vyplynie } P = P_{red} = F_{red} v_1 \Rightarrow F_{red} = \frac{P}{v_1}.$$



Po dosadení do rovnice (4) bude DPR redukovanej sústavy

$$\frac{2E_k}{v_1^2} a_1 = \frac{P}{v_1}, \quad (5)$$

kde  $E_k$  je kinetická energia v pôvodnej sústave ako funkcia rýchlosti  $v_1$  člena 1,

$P$  výkon v pôvodnej sústave ako funkcia rýchlosti  $v_1$  člena 1,

Kinetická energia v pôvodnej sústave vo funkcii rýchlosti  $v_1$  je daná súčtom

$$E_k = \sum E_{k_i} = E_{k_1} + E_{k_2} + E_{k_3},$$

pričom pre kinematické veličiny platia vzťahy  $v_1 = \omega_2 r$ ,  $v_3 = \omega_2 R$ ,  $v_3 = \frac{v_1 R}{r}$ .

Potom

$$E_{k_1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{G_1}{g} v_1^2,$$

$$E_{k_2} = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{G_2}{g} \frac{v_1^2 R_2^2}{r^2},$$

$$E_{k_3} = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = \frac{1}{2} \frac{G_3}{g} \frac{v_1^2 R^2}{r^2},$$

odkiaľ po dosadení

$$E_k = \frac{v_1^2}{2g} \left( G_1 + \frac{1}{2} \frac{G_2 R^2}{r^2} + \frac{G_3 R^2}{r^2} \right).$$

Výkon v pôvodnej sústave vo funkcii rýchlosti  $v_1$  člena 1 je daný súčtom

$$P = \sum P_i = P_1 + P_2 + P_3.$$

Pretože sila  $N_1$  je kolmá na smer pohybu, sily  $N_2$  a  $N_3$  sú silami vo vnútorných väzbách, a sily  $G_2, A_x, A_y$  pôsobia v nepohybujúcom sa bode, ich výkony sú rovné nule a preto platí

$$P_1 = -v_1 G_1 \sin \beta,$$

$$P_2 = 0,$$

$$P_3 = G_3 v_3 = G_3 \frac{v_1 R}{r}.$$

Potom výkon v pôvodnej sústave je

$$P = v_1 \left( -G_1 \sin \beta + G_3 \frac{R}{r} \right).$$

Po dosadení do rovnice (5) bude DPR redukovanej sústavy

$$\frac{2v_1^2 \left( G_1 + \frac{G_2}{2} \frac{R^2}{r^2} + G_3 \frac{R^2}{r^2} \right)}{2gv_1} a_1 = v_1 \left( -G_1 \sin \beta + G_3 \frac{R}{r} \right),$$

odkiaľ po úprave dostávame

$$\alpha_1 = r\alpha_2,$$

kde

$$\alpha_2 = \frac{g(G_3 R - G_1 r \sin \beta)}{G_1 r^2 + R^2 \left( \frac{G_2}{2} + G_3 \right)},$$

čo môžeme porovnať s riešením a) príkladu.

Ak budeme redukovať (prepočítavať) pohyb pôvodnej sústavy na pohyb člena 2, ktorý vykonáva rotačný pohyb okolo stálej osi rotácie, potom DPR redukovanej sústavy je

$$I_{red} \alpha_2 = M_{red}. \quad (6)$$

$$\text{Z rovnice (1) vyplýva} \quad E_k = E_{kred} = \frac{1}{2} I_{red} \omega_2^2 \quad \Rightarrow \quad I_{red} = \frac{2E_k}{\omega_2^2}.$$

$$\text{Z rovnice (3) vyplýva} \quad P = P_{red} = M_{red} \omega_2 \quad \Rightarrow \quad M_{red} = \frac{P}{\omega_2}.$$

Po dosadení do rovnice (6) bude DPR redukovanej sústavy

$$\frac{2E_k}{\omega_2^2} \alpha_2 = \frac{P}{\omega_2}, \quad (7)$$

kde  $E_k$  je kinetická energia v pôvodnej sústave ako funkcia uhlovej rýchlosti  $\omega_2$  člena 2,

$P$  výkon v pôvodnej sústave ako funkcia uhlovej rýchlosti  $\omega_2$  člena 2.

Kinetická energia pôvodnej sústavy vo funkcii uhlovej rýchlosti  $\omega_2$  je daná súčtom

$$E_k = \sum E_{k_i} = E_{k_1} + E_{k_2} + E_{k_3},$$

pričom pre kinematické veličiny platia vzťahy  $v_1 = \omega_2 r$ ,  $v_2 = \omega_2 R$ .

Potom

$$E_{k_1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{G_1}{g} \omega_2^2 r^2,$$

$$E_{k_2} = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 = \frac{1}{4} \frac{G_2}{g} R^2 \omega_2^2,$$

$$E_{k_3} = \frac{1}{2} m_3 v_3^2 = \frac{1}{2} \frac{G_3}{g} R^2 \omega_2^2,$$

odkiaľ po dosadení

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{\omega_2^2}{g} \left( G_1 r^2 + \frac{1}{2} G_2 R^2 + G_3 R^2 \right).$$

Výkon v pôvodnej sústave vo funkcii uhlovej rýchlosti  $\omega_2$  určíme zo vzťahov odvodených v predchádzajúcom riešení

$$P = \sum P_i = P_1 + P_2 + P_3,$$

kde

$$P_1 = -v_1 G_1 \sin \beta = -G_1 \omega_2 r \sin \beta,$$

$$P_2 = 0,$$

$$P_3 = G_3 v_3 = G_3 \omega_2 R.$$

Potom výkon v pôvodnej sústave je

$$P = \omega_2 (G_3 R - G_1 r \sin \beta).$$

Po dosadení do rovnice (7) bude DPR redukovanej sústavy

$$\frac{2}{\omega_2} \frac{1}{2} \frac{\omega_2^2}{g} \left( G_1 r + \frac{1}{2} G_2 R^2 + G_3 R^3 \right) \alpha_2 = \omega_2 (G_3 R - G_1 r \sin \beta),$$

odkiaľ po úprave dostávame

$$\alpha_2 = \frac{g (G_3 R - G_1 \sin \beta)}{G_1 r^2 + R^2 \left( G_3 + \frac{G_2}{2} \right)},$$

čo môžeme porovnať s predchádzajúcimi riešeniami.

### c) Langrangeove rovnice II. druhu

#### 1. Uvoľnenie

Použijeme obr.10.7.

#### 2. Dynamická pohybová rovnice (DPR) sústavy

Langrangeovu rovnicu pre tento typ sústavy môže zapísať v tvare

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial E_k}{\partial q_i} = Q_i, \quad (1)$$

kde  $q_i$  je zovšeobecnená súradnica,

$\dot{q}_i$  zovšeobecnená rýchlosť,

$E_k$  kinetická energia sústavy,

$Q_i$  zovšeobecnená sila.

Za zovšeobecnenú súradnicu zvolíme posuv  $s_1$  člena 1. Potom

$$q_1 = s_1, \quad \Rightarrow \quad \dot{q}_1 = \dot{s}_1.$$

Kinetická energia pôvodnej sústavy vo funkcii rýchlosti  $v_1$  člena 1 (pozri riešenie a) príkladu) je daná vzťahom

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{g} \left( G_1 + \frac{1}{2} \frac{G_2 R^2}{r^2} + \frac{G_3 R^2}{r^2} \right) = \frac{\dot{s}_1^2}{2g} \left( G_1 + \frac{G_2 R^2}{2r^2} + \frac{G_3 R^2}{r^2} \right),$$

odkiaľ

$$\frac{\partial E_k}{\partial s_1} = 0,$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{s}_1} = \frac{\dot{s}_1}{g} \left( G_1 + \frac{1}{2} \frac{G_2 R^2}{r^2} + \frac{G_3 R^2}{r^2} \right),$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{s}_1} = \frac{\ddot{s}_1}{g} \left( G_1 + \frac{G_2 R^2}{2r^2} + \frac{G_3 R^2}{r^2} \right).$$

Zovšeobecnenú silu  $Q_1$  určíme s využitím virtuálnej práce  $\delta A$  síl pôsobiacich na členy sústavy vo funkcii virtuálneho posunutia  $\delta s_1$  člena 1

$$\delta A = -\delta s_1 G_1 \sin \beta + G_3 \delta s_3 = -G_1 \delta s_1 + G_3 \frac{R}{r} \delta s_1,$$

pričom medzi virtuálnymi pohybmi členov sústavy platia závislosti

$$\delta s_1 = r \delta \varphi_2, \quad \delta s_3 = \delta \varphi_2 R,$$

potom

$$\delta A = \delta s_1 \left( G_3 \frac{R}{r} - G_1 \sin \beta \right).$$

odkiaľ zovšeobecnená sila je

$$Q_1 = G_3 \frac{R}{r} - G_1 \sin \beta.$$

Po dosadení do rovnice (1) bude DPR sústavy

$$\frac{\ddot{s}_1}{g} \left( G_1 + \frac{G_2 R^2}{2r^2} + \frac{G_3 R^2}{r^2} \right) = G_3 \frac{R}{r} - G_1 \sin \beta,$$

odkiaľ po úprave dostávame

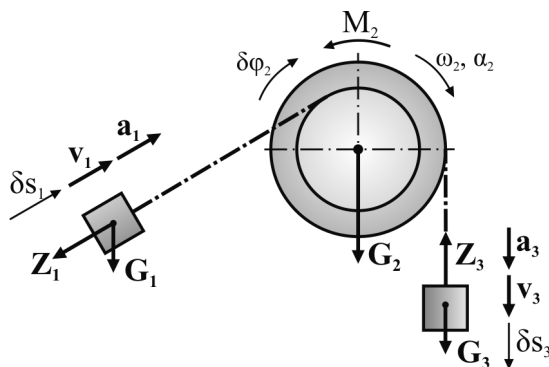
$$\ddot{s}_1 = a_1 - \frac{(G_3 R - G_1 r \sin \beta) g}{G_1 r^2 + R^2 \left( \frac{G_2}{2} + G_3 \right)} r,$$

čo môžeme porovnať s riešeniami a), b) príkladu.

d) Princíp virtuálnych prác. Princíp d'Alembert-Lagrange. Všeobecná rovnica dynamiky

1. Uvoľnenie

Zakreslíme vonkajšie aktívne sily (ktoré konajú prácu)  $G_1, G_3$ , zotrvačné d'Alembertove sily a momenty  $Z_1, Z_3, M_2$ .



Obr. 10.8

2. Dynamická pohybová rovnica (DPR) sústavy

Princíp virtuálnych prác pre tento typ sústavy môžeme formálne vyjadriť v tvare

$$\sum (m_i a_i - F_i) \delta s_i = 0, \quad (1)$$

kde  $m_i a_i$  predstavuje zotrvačné účinky, orientované opačne ako zrýchlenia,

$F_i$  vonkajšie aktívne sily,

$\delta s_i$  virtuálne pohyby.

Zotrvačné sily sú

$$Z_1 = m_1 a_1 = \frac{G_1}{g} a_1,$$

$$Z_3 = \frac{G_3}{g} a_3 = \frac{G_3}{g} \frac{R}{r} a_1,$$

pričom platí  $a_3 = \frac{a_1}{r} R$ .

Zotrvačný moment

$$M_2 = \alpha_2 I_2 = \frac{a_1}{r} \frac{1}{2} \frac{G_2}{g} R^2 = \frac{1}{2} \frac{G_2}{g} \frac{R^2}{r} a_1.$$

Po dosadení do rovnice (1) dostávame

$$-G_1 \delta s_1 \sin \beta - Z_1 \delta s_1 - M_2 \delta \varphi_2 + G_3 \delta s_3 - Z_3 \delta s_3 = 0,$$

pričom medzi virtuálnymi pohybmi členov sústavy platia závislosti

$$\delta s_1 = r \delta \varphi_2, \quad \delta s_3 = \delta \varphi_2 R,$$

potom

$$-G_1 \delta s_1 \sin \beta - \frac{G_1}{g} a_1 \delta s_1 - \frac{1}{2} \frac{G_2}{g} \frac{R^2}{r} a_1 \frac{\delta s_1}{r} + G_3 \frac{\delta s_1}{r} R - \frac{G_3}{g} \frac{R}{r} a_1 \frac{\delta s_1}{r} R = 0,$$

po úprave

$$-\frac{a_1}{g} \left( G_1 + \frac{G_2 D^2}{2r^2} + G_3 \frac{R^2}{r^2} \right) = G_1 \sin \beta - G_3 \frac{R}{r},$$

odkiaľ

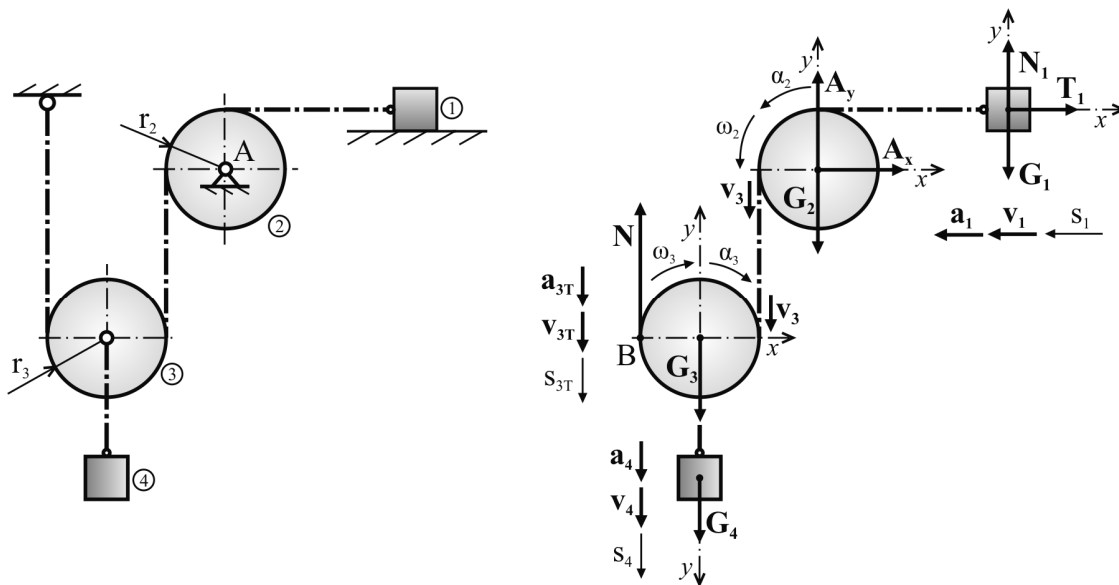
$$a_1 = \frac{rg(G_3 R - G_1 r \sin \beta)}{G_1 r^2 + R^2 \left( \frac{G_2}{2} + G_3 \right)},$$

čo môžeme porovnať s predchádzajúcimi riešeniami a), b), c) príkladu.

### **Príklad 10.6**

Rovinná sústava sa pohybuje pod vplyvom vlastných tiaží tak, že na začiatku časového intervalu má jej člen 4 rýchlosť  $v_4$ . Akú dráhu musí prekonať člen 4, aby sa jeho rýchlosť zdvojnásobila? Koeficient šmykového trenia medzi členom 1 a podložkou je  $f$ . Ostatné pasívne odpory zanedbajte. Členy 1, 4 považujte za hmotné body.

Dané hodnoty:  $v_4 = 0,5 \text{ ms}^{-1}$ ,  $f = 0,2$ ;  $r_2 = r_3$ ,  $G_1 = G_4 = 10 \text{ N}$ ,  $G_2 = G_3 = 30 \text{ N}$



**Obr. 10.9**

Úlohu riešime s využitím vety o zmene veľkosti kinetickej energie sústavy.

#### **1. Uvoľnenie**

Zakreslíme vonkajšie aktívne sily, t. j. vlastné tiaže  $G_1, G_2, G_3, G_4$ , tangenciálnu  $T_1$  a normálovú  $N_1$  zložku šmykového odporu podložky na člen 1, osovú silu  $N$  v lane člena

3. Na člen 2 pôsobí zložky reakcie  $A_x, A_y$  v klbe  $A$ . Nakreslíme sily vo vnútorných väzbách (na lanách) medzi členmi sústavy. Pretože platí zákon akcie a reakcie, je celková práca týchto síl sa rovná nule.

Na člen 1 pôsobí centrálna rovinná silová sústava, považujeme ho preto za hmotný bod v rovine, ktorý sa pohybuje priamočiaro zrýchlene.

Na člen 2 pôsobí všeobecná rovinná silová sústava, považujeme ho preto za teleso v rovine, ktoré sa pohybuje rotačne okolo stálej osi rotácie prechádzajúcej bodom  $A$ , zrýchlene.

Na člen 3 pôsobí rovnobežná rovinná silová sústava, považujeme ho preto za teleso v rovine, ktoré vykonáva všeobecný rovinný pohyb, pričom ťažisko sa pohybuje priamočiaro zrýchlene a bod  $B$  je okamžitým stredom otáčania.

Na člen 4 pôsobí priamková silová sústava, môžeme ho preto považovať za hmotný bod pohybujúci sa priamočiaro zrýchlene.

## 2. Dynamická pohybová rovnica (DPR) sústavy

Vetu o zmene veľkosti kinetickej energie sústavy môžeme zapísať v podobe

$$\sum E_{k_1} - \sum E_{k_0} = \sum A_i, \quad (1)$$

kde  $\sum E_{k_0}$  kinetická energia sústavy na začiatku časového intervalu,

$\sum E_{k_1}$  kinetická energia sústavy na konci časového intervalu,

$\sum A_i$  práca síl pôsobiacich na členy sústavy v danom časovom intervale.

Kinetická energia sústavy vo funkcii rýchlosti  $v_4$  člena 4 bude

$$\sum E_k = E_{k_1} + E_{k_2} + E_{k_3} + E_{k_4}.$$

Ak zohľadníme nasledovné kinetické závislosti medzi pohybmi jednotlivých členov sústavy

$$v_3 = 2\omega_3 r_3, \quad v_1 = v_3,$$

$$v_4 = v_{3T} = \omega_3 r_3,$$

$$v_3 = 2v_4,$$

$$v_3 = \omega_2 r_2,$$

potom pre ich kinetické energie platí

$$E_{k_1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} \frac{G_1}{g} v_1^2 \quad \Rightarrow \quad E_{k_1} = \frac{2G_1 v_4^2}{g},$$

$$E_{k_2} = \frac{1}{2} \omega_2^2 I_2, \quad \Rightarrow \quad E_{k_2} = \frac{G_2}{g} v_4^2,$$

$$E_{k_3} = \frac{1}{2} m_3 v_{3T}^2 + \frac{1}{2} \omega_3^2 I_3, \quad \Rightarrow \quad E_{k_3} = \frac{3}{4} \frac{G_3}{g} v_4^2,$$

$$E_{k_4} = \frac{1}{2} m_4 v_4^2 = \frac{1}{2} \frac{G_4}{g} v_4^2,$$

kde  $I_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2} = \frac{G_2}{g} \frac{r_2^2}{2} = I_3.$

Potom kinetická energia sústavy na začiatku časového intervalu bude

$$\sum E_{k_0} = \frac{v_4^2}{4g} (10G_1 + 7G_2).$$

Na konci časového intervalu je rýchlosť  $v_4$  dvojnásobná, takže

$$\sum E_{k_1} = \frac{v_4^2}{g} (10G_1 + 7G_2).$$

Potom po dosadení do rovnice (1) dostávame

$$\sum E_{k_1} - \sum E_{k_0} = \frac{3}{4} \frac{v_4^2}{g} (10G_1 + 7G_2).$$

Práca síl vo funkcii posuvu  $s_4$  člena 4

$$\sum A_i = A_1 + A_2 + A_3 + A_4.$$

Keďže sily  $N_1, G_1$  sú kolmé na smer pohybu, sily  $A_x, A_y, G_2$  pôsobia v nepohybujúcom sa bode a sila  $N$  pôsobí v okamžitom strede otáčania  $B$ , ich práce sú rovné nule. Potom platí

$$A_1 = A_{T_1} + A_{N_1} + A_{G_1} = -T_1 s_1$$

$$A_2 = A_{A_x} + A_{A_y} + A_{G_2} = 0,$$

$$A_3 = A_{G_3} + A_N = G_3 s_{3T}.$$

Po zohľadnení kinematických závislostí  $s_3 = 2s_{3T} = 2s_4$  a Coulombovho vzťahu  $T_1 = fN_1$

$$A_1 = -fN_1 s_1 = -fG_1 s_1,$$

$$A_3 = G_3 s_4,$$

$$A_4 = G_4 s_4.$$

Potom práca síl bude

$$\sum A_i = s_4 [G_2 + G_1 (1 - 2f)].$$

Po dosadení do rovnice (1) dostávame DPR sústavy

$$\frac{3}{4} \frac{v_4^2}{g} (10G_1 + 7G_2) = s_4 [G_2 + G_1 (1 - 2f)],$$



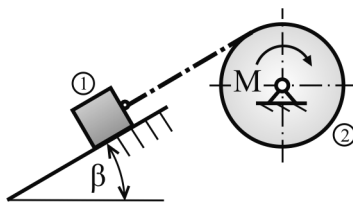
odkiaľ

$$s_4 = \frac{3v_4^2(10G_1 + 7G_2)}{4g[G_2 + G_1(1 - 2f)]} = 0,164 \text{ m.}$$

### **Príklad 10.7**

Vypočítajte moment  $M$  tak, aby sa sústava na obrázku pohybovala rovnomerne. Tiaž bubna a pasívne odpory zanedbajte.

Dané hodnoty:  $r = 20 \text{ cm}$ ,  $\beta = 30^\circ$ ,  $G_1 = 200 \text{ N}$  (tiaž bremena)



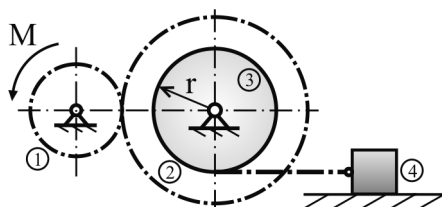
Obr. 10.10

(20 Nm)

### **Príklad 10.8**

Mechanizmus pozostáva z dvoch ozubených kolies s počtami zubov  $z_1, z_2$ , bubna o polomere  $r$ , jeho hmotnosť zanedbajte, bremena o tiaži  $G_4$ . Vypočítajte moment  $M$ , ak koeficient šmykového trenia člena 4 je  $f$  a bremeno 4 sa pohybuje rovnomerne.

Dané hodnoty:  $z_2 = 2z_1$ ,  $G_4 = 4 \cdot 10^3 \text{ N}$ ,  $r = 10 \text{ cm}$ ,  $f = 0,2$



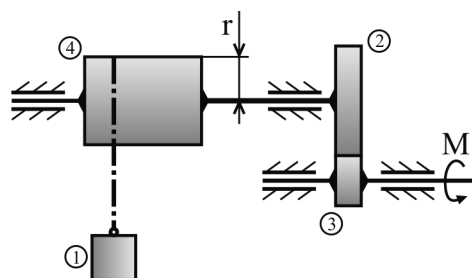
Obr. 10.11

(40 Nm)

### **Príklad 10.9**

Mechanizmus tvorený bremenom 1 o tiaži  $G_1$ , ozubenými kolesami 2, 3 s počtami zubov  $z_2, z_3$ , bubnom o polomere  $r$  (jeho hmotnosť zanedbajte) je poháňaný momentom  $M$ . Vypočítajte veľkosť momentu  $M$  tak, aby bol pohyb bremena rovnomerný. Pasívne odpory zanedbajte.

Dané hodnoty:  $G_1 = 900 \text{ N}$ ,  $r = 0,2 \text{ m}$ ,  $z_2 = 2z_3$



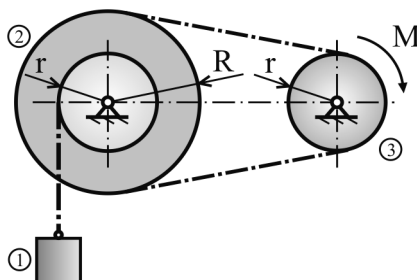
Obr.10.12

(90 Nm)

### **Príklad 10.10**

Vypočítajte veľkosť momentu  $M$  tak, aby sa bremeno 1 pohybovalo rovnomerne. Pasívne odpory a hmotnosti kolies 1, 2, 3 zanedbajte.

Dané hodnoty:  $G_1 = 900 \text{ N}$ ,  $R = 2r = 40 \text{ cm}$



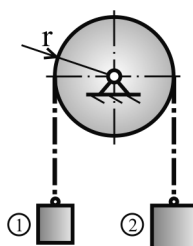
Obr. 10.13

(90 Nm)

### **Príklad 10.11**

Bremená 1, 2 o hmotnostiach  $m_1, m_2$  sú spojené lanom, ktoré je vedené cez kladku o polomere  $r$ . Vypočítajte zrýchlenia bremien. Hmotnosť kladky a pasívne odpory pritom zanedbajte.

Dané hodnoty:  $m_2 = 2m_1$



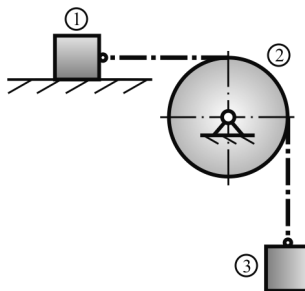
Obr.10.14

(3,27 ms<sup>-2</sup>)

### **Príklad 10.12**

Bremená  $m_1, m_3$  sú lanom spojené cez bubon (jeho hmotnosť zanedbajte). Pohybujú sa vplyvom vlastnej tiaže. Vypočítajte zrýchlenia bremien, ak koeficient šmykového trenia v mieste bremena 1 je  $f_1$ . Ostatné pasívne odpory zanedbajte.

Dané hodnoty:  $m_1 = m_3 = 2 \text{ kg}$ ,  $f = 0,1$



Obr.10.15

( $4,41 \text{ ms}^{-2}$ )

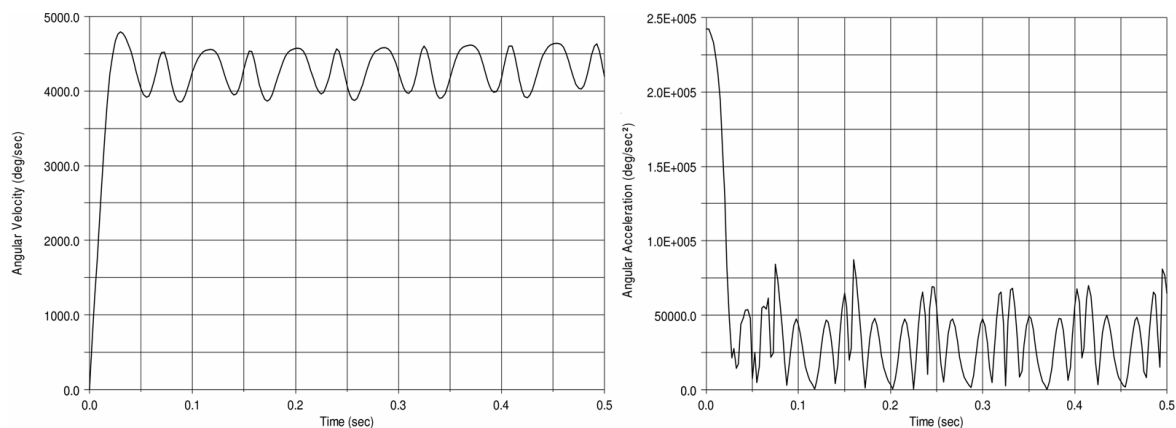
## **10.7 Riešenie úloh dynamiky pomocou výpočtovej techniky**

K vytváraniu počítačových modelov sa v súčasnosti pristupuje veľmi často, hlavne vo fáze návrhu a optimalizácie mechanického zariadenia. Použitie výpočtovej techniky je nevyhnutné najmä v prípade, keď matematický model mechanickej sústavy je natoľko komplikovaný, že jeho riešenie dostupnými analytickými metódami by bolo časovo veľmi náročné až nemožné. Keďže problematika počítačového modelovania mechanických a mechatronických sústav je pomerne rozsiahla, nie je možné venovať jej v tejto publikácii väčší priestor. V tejto kapitole sú preto uvedené len dva príklady, ktorých cieľom je ilustrovať možnosti využitia výpočtovej techniky pri riešení úloh dynamiky. Oba príklady sú riešené pomocou programu MSC Adams/View, ktorý umožňuje vytvárať modely mechanických sústav a simulovať ich správanie v statickej, kinematickej alebo dynamickej oblasti. Výsledky v podobe časových závislostí kinematických a silových veličín sú ľahko a rýchlo dostupné.

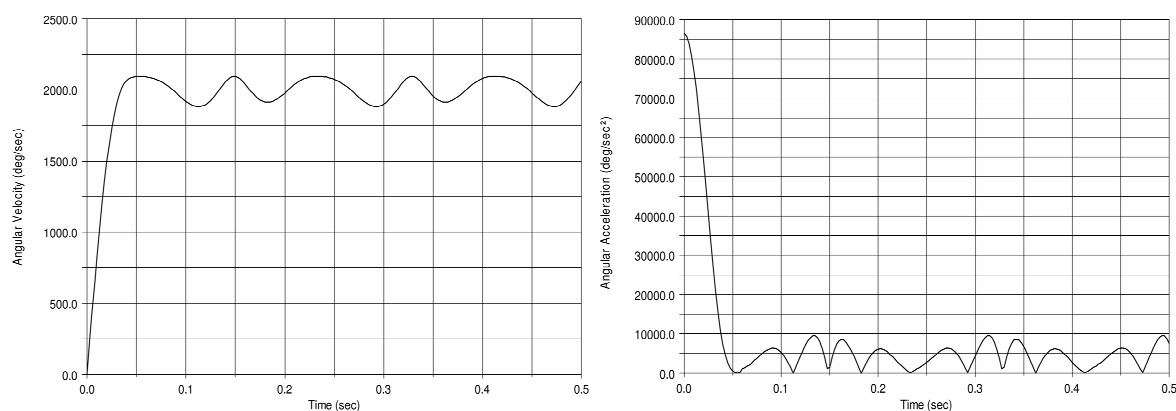
### **Príklad 10.12**

Na obr. 10.16 je znázornený centrický kľukový mechanizmus hnacieho stroja, ktorý transformuje priamočiary pohyb piesta na rotačný pohyb kľukového hriadeľa. Porovnajte kinematické charakteristiky (t.j. uhlovú rýchlosť, uhlové zrýchlenie) člena 2 pre prípad bez zotrvačníka a prípad so zotrvačníkom tvaru polkruhovej dosky o polomere  $r$ .





**Obr.10.18 Uhlová rýchlosť (vľavo) a uhlové zrýchlenie (vpravo) člena 2 bez zotrvačníka**



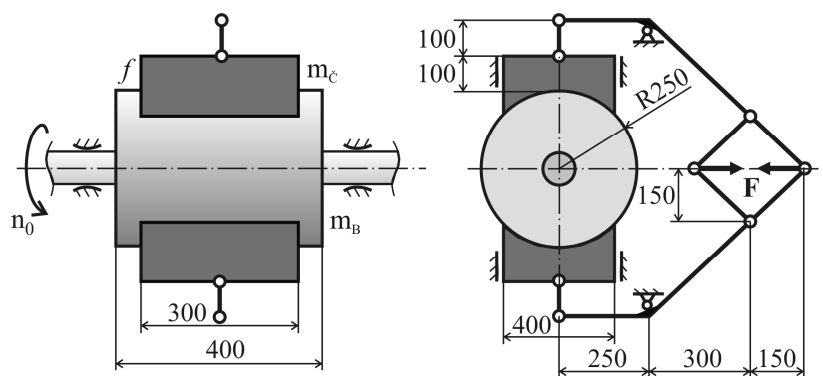
**Obr.10.19 Uhlová rýchlosť (vľavo) a uhlové zrýchlenie (vpravo) člena 2 so zotrvačníkom**

Z ich porovnania vyplýva, že v prípade hriadeľa so zotrvačníkom je chod hnacieho stroja oveľa plynulejší, než v prípade hriadeľa bez zotrvačníka. Tento rozdiel je spôsobený zmenou momentu zotrvačnosti člena 2 (t.j. kľukového hriadeľa) k jeho stálej osi rotácie. Zotrvačníky sú z tohto dôvodu bežnou súčasťou napr. spaľovacích motorov.

### **Príklad 10.13**

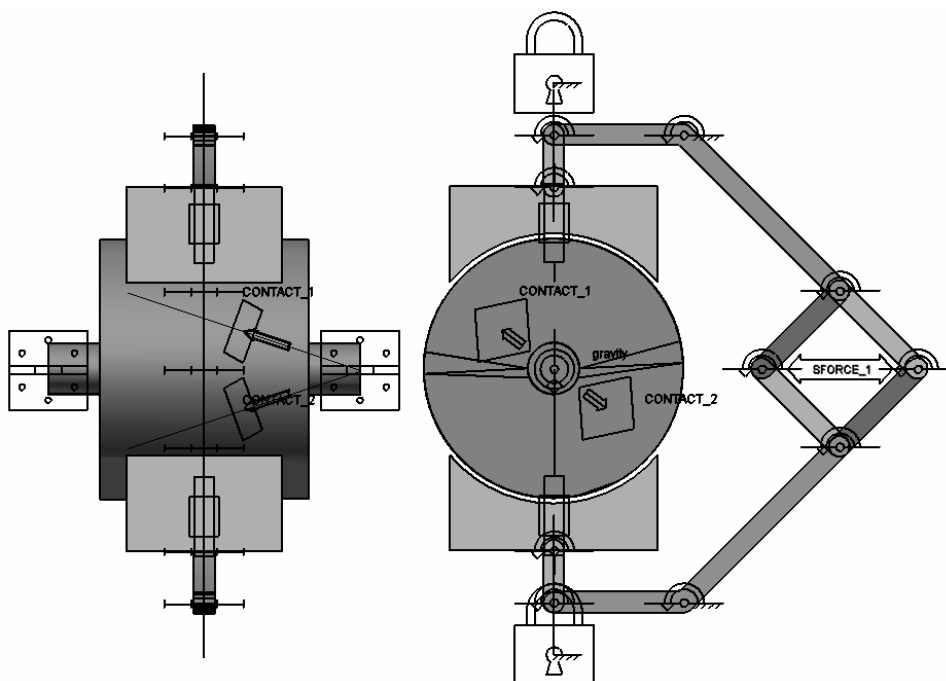
Brzdňý mechanizmus zdvíhacieho zariadenia s jedným trecím bubnom a dvoma brzdňými čeľusťami sa aktivuje v okamihu, kedy sú pracovné otáčky bubna  $n_0$ . Určte čas do úplného zastavenia bubna, ak je známa sila  $F$  akčného člena vyvolávajúceho brzdenie a súčiniteľ šmykového trenia medzi bubnom a čeľusťami je  $f$ .

Dané hodnoty:  $m_c = 35 \text{ kg}$ ,  $m_B = 75 \text{ kg}$ ,  $n_0 = 100 \text{ min}^{-1}$ ,  $F = 1000 \text{ N}$ ,  $f_{st} = 0,55$ ;  
 $f_{dyn} = 0,5$



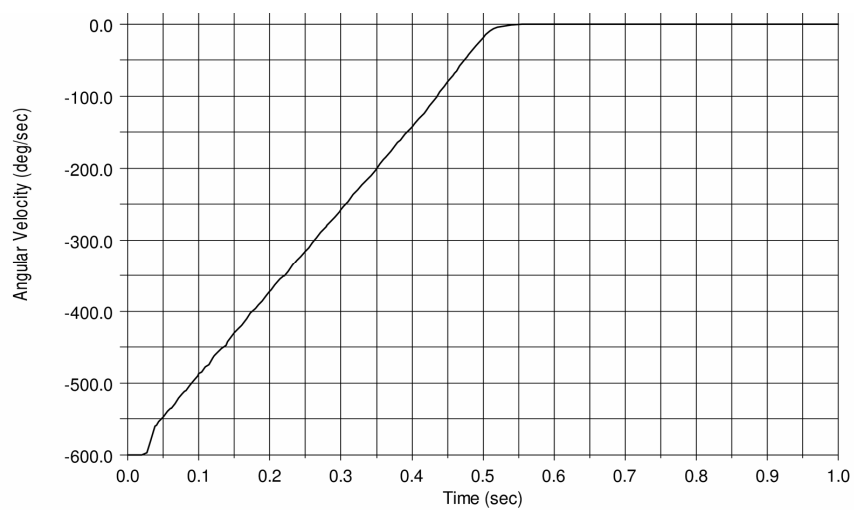
Obr.10.20

Na obr. 10.21 je znázornený počítačový model brzdného mechanizmu vytvorený v prostredí programu MSC Adams/View na základe zadaných údajov. Hmotnosti členov kľukového mechanizmu prenášajúceho zaťažujúcu silu na trecie čeľustia sú v pomere k hmotnosti bubna  $m_B$  a hmotnosti čeľustí  $m_c$  zanedbateľné. Bubnu boli udelené začiatočné otáčky  $n_0$ . Medzi bubnom a čeľusťami bol definovaný kontakt s predpísaným Coulombovým trením.



Obr.10.21

Pomocou merača uhlovej rýchlosti bola počas simulácie zaznamenávaná uhlová rýchlosť otáčania bubna a z tejto závislosti (obr. 10.22) bol odčítaný čas od začiatku brzdenia do úplného zastavenia bubna a to 0,57 s.



**Obr.10.22**

## 11 KMITANIE LINEÁRNYCH DISKRÉTNÝCH SÚSTAV

### 11.1 Voľné kmitanie lineárnej sústavy s 1 ° voľnosti bez tlmenia

Dynamická pohybová rovnica (DPR) pre voľné netlmené kmitanie mechanickej sústavy má tvar

$$m\ddot{x} + kx = 0,$$

kde  $m$  je hmotnosť objektu (kg),

$k$  tuhosť konštrukčného prvku (napr. pružiny) ( $\text{Nm}^{-1}$ ).

Všeobecné riešenie DPR hľadáme v tvare

$$x = A \sin(\Omega_0 t) + B \cos(\Omega_0 t),$$

kde  $A, B$  sú integračné konštanty, ktoré určíme pre dané začiatočné podmienky. Ak je  $x(t=0) = x_0$  a  $\dot{x}(t=0) = v_0$  potom riešenie DPR bude

$$x = \frac{v_0}{\Omega_0} \sin(\Omega_0 t) + x_0 \cos(\Omega_0 t),$$

kde  $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  je vlastná kruhová frekvencia ( $\text{rads}^{-1}$ ),

$\varphi = \arctg \frac{x_0 \Omega_0}{v_0}$  fázový uhol,

$T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$  doba kmitu (perióda) (s),

$f_0 = \frac{1}{T}$  frekvencia ( $\text{s}^{-1}$ ), (Hz).

Všeobecné riešenie DPR môžeme hľadať tiež v tvare, ktorý sa v praxi používa najčastejšie, t.j.

$$x = C \sin(\Omega_0 t + \varphi),$$

kde  $C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\Omega_0}\right)^2}$  je amplitúda výchylky kmitania,

$\varphi$  začiatočná fáza resp. fázové posunutie kmitavého pohybu na začiatku pohybu ( $t=0$ ).

Pre fázové posunutie  $\varphi$  platí vzťah

$$\text{tg } \varphi = \frac{x_0 - \Omega_0}{v_0}.$$



Parametre  $C$  a  $\varphi$  sú konštanty závislé od začiatočných podmienok. V prípade, ak  $x_0 = 0$  a  $v_0 = 0$ , voľné kmitanie nemôže nastať.

Ak teleso pri kmitaní vykonáva rotačný pohyb okolo stálej osi rotácie, potom DPR takéhoto pohybu vieme napísať v tvare

$$I_0 \ddot{\varphi} = \sum (M_i)_0,$$

kde  $I_0$  je moment zotrvačnosti telesa k stálej osi rotácie.

## 11.2 Voľné kmitanie lineárnej sústavy s 1 ° voľnosti s tlmením

Dynamická pohybová rovnica (DPR) pre voľné tlmené kmitanie mechanickej sústavy má tvar

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0,$$

kde  $m$  je hmotnosť bremena,

$k$  tuhosť konštrukčného prvku (napr. pružiny) ( $\text{Nm}^{-1}$ ),

$b$  súčiniteľ lineárneho viskózneho tlmenia ( $\text{kg s}^{-1}$ ).

Vydelíme DPR hmotnosťou  $m$

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Ak označíme

$$\frac{b}{m} = 2\delta, \quad \frac{k}{m} = \Omega_0^2$$

kde  $\delta$  konštanta útlmu ( $\text{s}^{-1}$ ),

$\Omega_0$  je vlastná kruhová frekvencia netlmeného kmitania,

potom DPR vieme zapísať v tvare

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0$$

V prípade, ak je  $\delta > \Omega_0$ , hovoríme o nadkritickom tlmení, pri ktorom nenastane kmitavý pohyb. Všeobecné riešenie pre nenulové začiatočné podmienky  $x(t=0) = x_0$ ,  $\dot{x}(t=0) = v_0$  je

$$x = e^{-\delta t} \left[ \frac{x_0 \delta + v_0}{q} \sinh(qt) + x_0 \cosh(qt) \right],$$

kde  $q = \sqrt{\delta^2 - \Omega_0^2}$ .

Ak je  $\delta = \Omega_0$ , hovoríme o kritickom tlmení. V tomto prípade, má všeobecné riešenie pri nenulových začiatočných podmienkach  $x(t=0) = x_0$ ,  $\dot{x}(t=0) = v_0$  tvar

$$x = e^{-\delta t} [x_0(1 + \delta t) + v_0 t]$$

a konštantu útlmu nazývame konštantou kritického útlmu  $\delta_k = \Omega_0$ . Potom pre súčiniteľ kritického tlmenia  $b_k$  platí

$$b_k = 2\delta_k m = 2\Omega_0 m = 2\sqrt{km}.$$

Ak je  $\delta < \Omega_0$ , hovoríme o podkritickom tlmení a všeobecné riešenie má tvar

$$x = e^{-\delta t} \left[ \frac{v_0 + x_0 \delta}{\Omega_d} \sin(\Omega_d t) + x_0 \cos(\Omega_d t) \right],$$

kde  $\Omega_d = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2}$  je vlastná kruhová frekvencia tlmenej sústavy. Perióda tlmenej sústavy je v tomto prípade daná vzťahom

$$T_d = \frac{2\pi}{\Omega_d},$$

resp.

$$T_d = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{2\pi}{\Omega_0 \sqrt{1 - b_p^2}},$$

kde  $b_p = \frac{\delta}{\Omega_0}$  je pomerný útlm.

Ďalej  $\lambda = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \delta T$  resp.  $\lambda = \frac{2\pi b_p}{\sqrt{1 - b_p^2}}$  je logaritmickej dekrement.

### 11.3 Vynútené kmitanie sústavy s 1° voľnosti bez tlmenia

Dynamická pohybová rovnica (DPR) vynúteného kmitania mechanickej sústavy s 1° voľnosti má tvar

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t),$$

kde  $F_0$  je amplitúda budiacej sily,

$\omega$  kruhová frekvencia budiacej sily.

Všeobecné riešenie DPR je v tvare

$$x = A \sin(\Omega_0 t) + B \cos(\Omega_0 t) + C \sin(\omega t),$$

kde  $C = \frac{F_0}{k - m\omega^2}$  je amplitúda vynúteného kmitania.

Pre nulové začiatkové podmienky  $x(t=0)=0$ ,  $\dot{x}(t=0)=0$  je riešenie

$$x = \frac{F_0}{k - m\omega^2} \left[ \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\Omega_0} \sin(\Omega_0 t) \right].$$

### 11.4 Vynútené kmitanie sústavy s 1° voľnosti s tlmením

Dynamická pohybová rovnica (DPR) vynúteného kmitania mechanickej sústavy s 1° voľnosti s tlmením má tvar

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t).$$

Za predpokladu, že  $\delta < \Omega_0$  (podkritické tlmenie), všeobecné riešenie bude

$$x = e^{-\delta t} [A \sin(\Omega_d t) + B \cos(\Omega_d t)] + C \sin(\omega t - \varphi),$$

kde  $\Omega_d = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2}.$

Všeobecné riešenie DPR sa dá zapísať aj v tvare

$$x = x_1 + x_2,$$

kde  $x_1$  je všeobecné riešenie príslušnej homogénnej diferenciálnej rovnice,

$x_2$  partikulárne riešenie nehomogénnej diferenciálnej rovnice.

Ak predpokladáme riešenie  $x_2$  v tvare

$$x_2 = C \sin(\omega t - \varphi),$$

kde  $C$ ,  $\varphi$  sú integračné konštanty, ktoré určíme dosadením partikulárneho riešenia do DPR, potom

$$C = \frac{F_0}{m} \frac{1}{\sqrt{(\Omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2 \omega^2}}.$$

Ak označíme  $\eta = \frac{\omega}{\Omega_0}$  ako naladenie sústavy, potom

$$C = \frac{F_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4b_p^2 \eta^2}} = C_{st} \frac{1}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4b_p^2 \eta^2}},$$

kde  $C_{st} = \frac{F_0}{k} = \text{konšt.}$  je výchylka spôsobená statickým zaťažením maximálnou budiacou silou  $F_0$ .

Člen  $x_1$  riešenia diferenciálnej rovnice opisuje voľné tlmené kmitanie sústavy, ktoré s časom asymptoticky zaniká. Ide o prechodový nestacionárny člen všeobecného riešenia.

Člen  $x_2$  riešenia diferenciálnej rovnice (partikulárne riešenie) vyjadruje ustálené vynútené kmitanie sústavy a je stacionárnym členom všeobecného riešenia.

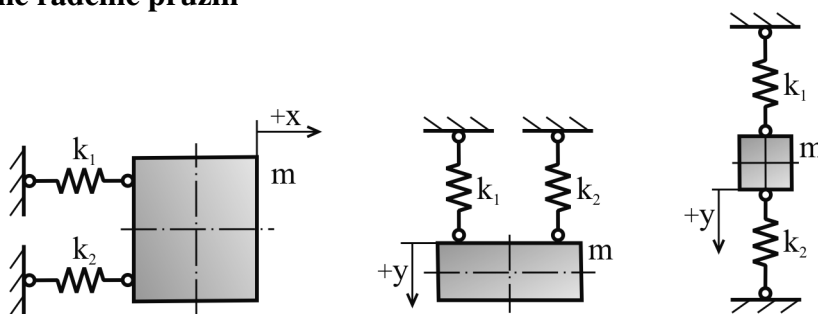
Po určitom čase bude sústava vykonávať len ustálené vynútené kmitanie s amplitúdou  $C$  a začiatočnou fázou  $\varphi$ .

V prípade, ak je naladenie sústavy  $\eta = 1$ , t.j.  $\omega = \Omega_0$ , nastáva rezonancia a blízke okolie  $\eta = 1$  sa nazýva oblasťou rezonancie. Maximálnu amplitúdu, ktorú môže vyvolať budiaca sila v stave rezonancie pri malom tlmení sústavy, určíme s dostatočnou presnosťou zo vzťahu

$$C_{rez} = \frac{F_0}{b\Omega_0}.$$

## 11.5 Radenie pružín

### Paralelné radenie pružín



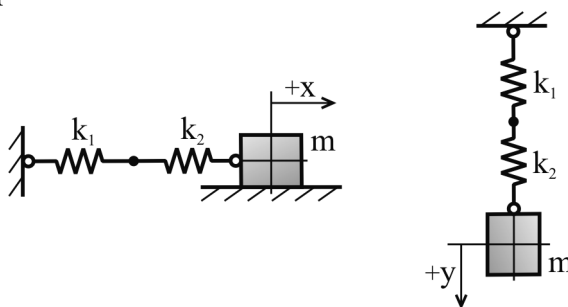
Obr. 11.1

Pre paralelné radenie pružín sú určujúce:

- rovnako veľké deformácie pružín,
- nerovnako veľké sily v pružinách,
- výsledná tuhosť:

$$k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$$

### Sériové radenie pružín



Obr. 11.2

Pre sériové radenie pružín sú určujúce:

- nerovnako veľké deformácie pružín,
- rovnako veľké sily v pružinách,
- výsledná tuhosť:

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n}.$$

Pre dve pružiny

$$k_{12} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}.$$

## 11.6 Príklady (Kmitanie sústav s 1° voľnosti)

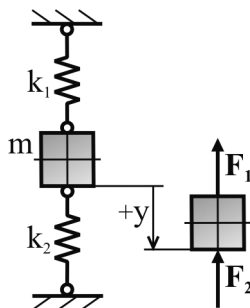
### Príklad 11.1

Pružiny o tuhostiach  $k_1, k_2$  sú uchytené k tuhým stenám. Medzi pružinami je uchytené bremeno o hmotnosti  $m$ , ktoré môžeme považovať za hmotný bod. Vypočítajte vlastnú kruhovú frekvenciu, periódu a frekvenciu voľného kmitania bremena vo vertikálnom smere. Silu tiaže bremena zanedbajte.

Dané hodnoty:  $G = 5 \cdot 10^4 \text{ N}$ ,  $k_1 = 3 \cdot 10^2 \text{ Ncm}^{-1}$ ,  $k_2 = 5 \cdot 10^2 \text{ Ncm}^{-1}$

#### 1. Uvoľnenie

Vychýlime bremeno z rovnovážnej polohy jeho posunutím o výchylku  $y$ . Za kladné orientácie vonkajších síl pôsobiacich na bremeno považujeme kladnú orientáciu výchylky  $+y$ . Na bremeno pôsobia namiesto pružín (väzieb) sily v pružinách  $F_1, F_2$ . Keďže sily tvoria priamkovú silovú sústavu, to znamená, že sa pohybuje hmotný bod, ktorý pri kmitaní (vo vertikálnom smere) vykonáva priamočiary zrýchlený pohyb. Sústava má 1° voľnosti.



Obr. 11.3

## 2. Dynamická pohybová rovnica (DPR) sústavy

V smere osi  $y$  bude

$$\begin{aligned} ma_y &= \sum F_{iy}, \\ m\ddot{y} &= -F_1 - F_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Sily v pružinách sú úmerné ich tuhostiam a deformáciám, teda

$$F_1 = k_1 y, \quad F_2 = k_2 y.$$

Po dosadení do (1)

$$m\ddot{y} = -(k_1 + k_2)y.$$

Po úprave

$$\ddot{y} + \frac{k_1 + k_2}{m} y = 0, \quad (2)$$

kde výsledná tuhosť je  $k = k_1 + k_2$ , z čoho vyplýva, že ide o paralelné radenie pružín.

Aby sme vedeli vypočítať vlastnú kruhovú frekvenciu  $\Omega_0$ , periódu  $T_0$ , frekvenciu  $f_0$  voľného netlmeného kmitania, nepotrebujeme riešiť diferenciálnu rovnicu.

V rovnici (2), výraz pri výchylke, t.j. pri  $y$  je rovný druhej mocnine vlastnej kruhovej frekvencie

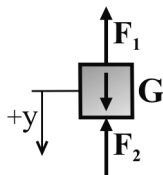
$$\frac{k_1 + k_2}{m} = \Omega_0^2,$$

odkiaľ potom dostávame

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} = 12,52 \text{ rads}^{-1}.$$

Je potrebné si uvedomiť, že pri vyčíslňovaní dosadzujeme hodnoty v základných jednotkách, t.j.  $k_1 = 3 \cdot 10^4 \text{ Nm}^{-1}$ ,  $k_2 = 5 \cdot 10^4 \text{ Nm}^{-1}$ .

Následne perióda vlastného netlmeného kmitania je  $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 0,5015 \text{ s}$ , čo zodpovedá frekvencii  $f_0 = \frac{1}{T_0} = 1,993 \text{ s}^{-1} = 1,993 \text{ Hz}$ .



Obr. 11.4

Ak by sme uvažovali aj s vplyvom sily vlastnej tiaže  $G$  na  $\Omega_0, T_0, f_0$  (Obr. 11.4), potom DPR bude

$$m\ddot{y} = \sum F_{iy}$$

$$m\ddot{y} = -F_1 - F_2 + G,$$

odkiaľ po úprave dostávame

$$\ddot{y} + \frac{k_1 + k_2}{m} y + \frac{G}{m} = 0. \quad (3)$$

V rovnici (3), je výraz pri výchylke  $y$  rovný druhej mocnine vlastnej kruhovej frekvencie

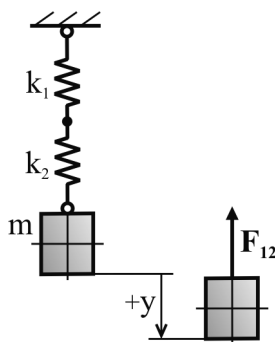
$$\Omega_0^2 = \frac{k_1 + k_2}{m},$$

čo je to isté ako pri výpočte bez sily  $G$ .

### **Príklad 11.2**

Pružiny o tuhostiach  $k_1, k_2$  sú uchytené k tuhým stenám. Medzi pružinami je uchytené bremeno o hmotnosti  $m$ , ktoré môžeme považovať za hmotný bod. Vypočítajte vlastnú kruhovú frekvenciu, periódu a frekvenciu voľného kmitania bremena vo vertikálnom smere. Silu tiaže bremena zanedbajte.

Dané hodnoty:  $G = 5 \cdot 10^4 \text{ N}$ ,  $k_1 = 3 \cdot 10^2 \text{ Ncm}^{-1}$ ,  $k_2 = 5 \cdot 10^2 \text{ Ncm}^{-1}$



**Obr. 11.5**

#### **1. Uvoľnenie**

Vychýlime bremeno z rovnovážnej polohy jeho posunutím o výchylku  $y$ . Za kladné orientácie vonkajších pôsobiacich síl na bremeno považujeme kladnú orientáciu  $+y$ . Na bremeno pôsobí sila  $F_{12}$ , ktorá je rovnaká v jednej aj v druhej pružine. Pružiny sú radené do série. Bremeno sa pri kmitaní pohybuje priamočiarno zrýchlene. Sústava má 1° voľnosti.

## 2. Dynamická pohybová rovnica (DPR) sústavy

V smere osi  $y$  bude

$$ma_y = \sum F_{iy} \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = -F_{12} = -k_{12}y = -\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} y,$$

$$m\ddot{y} + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} y = 0,$$

$$\ddot{y} + \frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m} y = 0. \quad (2)$$

Pre výpočet vlastnej kruhovej frekvencie  $\Omega_0$ , periódy  $T_0$ , frekvencie  $f_0$  voľného netlmeného kmitania nepotrebujeme riešiť diferenciálnu rovnicu.

V rovnici (2), výraz pri výchylke, t.j. pri  $y$  je rovný druhej mocnine vlastnej kruhovej frekvencie

$$\Omega_0^2 = \frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m},$$

odkiaľ dostávame

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{(k_1 + k_2)m}} = 6,06 \text{ rad s}^{-1}.$$

Tuhosti  $k_1$ ,  $k_2$  dosadzujeme v základných jednotkách, t.j.  $k_1 = 3 \cdot 10^4 \text{ Nm}^{-1}$ ,  $k_2 = 5 \cdot 10^4 \text{ Nm}^{-1}$ .

Následne perióda vlastného netlmeného kmitania je  $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 1,0359 \text{ s}$ , čo zodpovedá frekvencii  $f_0 = \frac{1}{T_0} = 0,965 \text{ s}^{-1} = 0,965 \text{ Hz}$ .

### Poznámka k príkladom 11.1 a 11.2:

Pri zmene radenia pružín (konštrukčných prvkov) sa i pri tých istých veľkostiach  $m$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  vlastnosti mechanickej sústavy z hľadiska kmitania výrazne menia (pozri výsledky príkladov 11.1 a 11.2).

### **Príklad 11.3**

Napíšte dynamickú pohybovú rovnicu (DPR) pre úlohu z príkladu 11.1 s využitím Lagrangeovej rovnice II. druhu.



## 1. Uvoľnenie

Pre uvoľnenie použijeme obr. 11.4. Ide o sústavu s 1° voľnosti.

## 2. Dynamická pohybová rovnica (DPR) sústavy

Lagrangeovu rovnicu II. druhu pre tento typ úlohy môžeme napísať v tvare

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial E_k}{\partial q} + \frac{\partial E_p}{\partial q} = 0, \quad (1)$$

kde  $q$  je zovšeobecnená súradnica,

$\dot{q}$  zovšeobecnená rýchlosť,

$E_k$  kinetická energia sústavy,

$E_p$  potenciálna energia sústavy.

Za zovšeobecnenú súradnicu zvolíme vychýlenie bremena z jeho rovnovážnej polohy, teda  $q = y$ . Jej derivovaním dostávame zovšeobecnenú rýchlosť t.j.  $\dot{q} = \dot{y}$ .

Potom Lagrangeova rovnica bude mať tvar

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial E_k}{\partial y} + \frac{\partial E_p}{\partial y} = 0.$$

Potenciálna energia (v pružinách) pri ich statickej deformácii  $y_{st}$  a deformácií  $y$  od síl bude

$$E_p = \frac{1}{2} k_1 (y_{st} + y)^2 - \frac{1}{2} k_1 y_{st}^2 + \frac{1}{2} k_2 (y_{st} + y)^2 - \frac{1}{2} k_2 y_{st}^2 - Gy,$$

$$E_p = k_1 y_{st} y + \frac{1}{2} k_1 y^2 + k_2 y_{st} y + \frac{1}{2} k_2 y^2 - Gy.$$

Ak pre nulové pôsobiace sily platí

$$\left( \frac{\partial E_p}{\partial y} \right)_{y=0} = k_1 y_{st} + k_2 y_{st} - G = 0,$$

potom

$$E_p = \frac{1}{2} k_1 y^2 + \frac{1}{2} k_2 y^2,$$

teda

$$\frac{\partial E_p}{\partial y} = k_1 y + k_2 y.$$

Kinetická energia pri pohybe bremena je

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{y}^2.$$

Dosadením jej parciálnych derivácií

$$\frac{\partial E_k}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}} = m\ddot{y}$$

do rovnice (1) dostávame DPR v tvare

$$\ddot{y} + \frac{k_1 + k_2}{m} y = 0.$$

### **Príklad 11.4**

Napíšte dynamickú pohybovú rovnicu (DPR) pre úlohu z príkladu 11.2 s využitím Lagrangeovej rovnice II. druhu.

#### 1. Uvoľnenie

Použijeme obr. 11.5, pričom budeme navyše uvažovať aj vplyv sily vlastnej tiaže  $G$  bremena.

#### 2. Dynamická pohybová rovnica (DPR) sústavy

Lagrangeovu rovnicu II. druhu pre tento typ úlohy môžeme napísať v tvare

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial E_k}{\partial q} + \frac{\partial E_p}{\partial q} = 0, \quad (1)$$

kde  $q$  je zovšeobecnená súradnica,

$\dot{q}$  zovšeobecnená rýchlosť,

$E_k$  kinetická energia sústavy,

$E_p$  potenciálna energia sústavy.

Za zovšeobecnenú súradnicu zvolíme vychýlenie bremena z jeho rovnovážnej polohy, teda  $q = y$ . Derivovaním zovšeobecnenej súradnice následne dostávame zovšeobecnenú rýchlosť t.j.  $\dot{q} = \dot{y}$ .

Potom Lagrangeova rovnica bude mať tvar

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial E_k}{\partial y} + \frac{\partial E_p}{\partial y} = 0.$$

Potenciálna energia (v pružinách) pri ich statickej deformácii  $y_{st}$  a deformácií  $y$  od síl bude

$$E_p = \frac{1}{2} k_{12} (y_{st} + y)^2 - \frac{1}{2} k_{12} y_{st}^2 - Gy,$$

$$E_p = k_{12} y_{st} y + \frac{1}{2} k_{12} y^2 - Gy.$$

Ak pre nulové pôsobiace sily platí

$$\left( \frac{\partial E_p}{\partial y} \right)_{y=0} = k_{12} y_{st} + k_{12} y - G = 0 ,$$

potom potenciálna energia bude

$$E_p = \frac{1}{2} k_{12} y^2 .$$

Kinetická energia pri pohybe bremena je

$$E_k = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 ,$$

Dosadením parciálnych derivácií potenciálnej a kinetickej energie

$$\frac{\partial E_p}{\partial y} = k_{12} y ,$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}} = m y , \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}} = m \ddot{y} , \quad \frac{\partial E_k}{\partial y} = 0$$

do rovnice (1) dostávame DPR v tvare

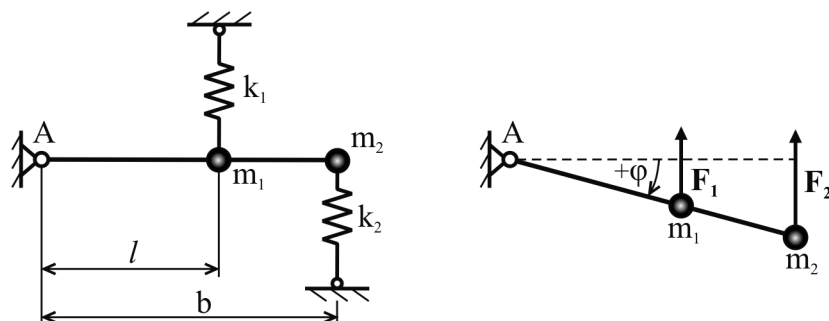
$$m \ddot{y} - 0 + k_{12} y = 0$$

$$\ddot{y} + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} y = 0 .$$

### **Príklad 11.5**

Tuhý nosník, ktorého hmotnosť možno zanedbať, je uchytený k rámu kĺbom  $A$ . Na nosníku sú pripevnené bremená (hmotné body) s hmotnosťami  $m_1$ ,  $m_2$ . Sústava je k rámu uchytená pružinami  $k_1$ ,  $k_2$ . Vypočítajte vlastnú kruhovú frekvenciu voľného kmitania nosníka, periódu a frekvenciu.

Dané hodnoty:  $m_1 = 5 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 2 \text{ kg}$ ,  $b = 3 \text{ m}$ ,  $l = 1 \text{ m}$ ,  $k_1 = 40 \text{ Ncm}^{-1}$ ,  $k_2 = 60 \text{ Ncm}^{-1}$



**Obr. 11.6**

## 1. Uvoľnenie

Body  $m_1$  a  $m_2$  sa spolu s nosníkom môžu pohybovať okolo kĺbu  $A$  rotačne. Vychýlime nosník z rovnovážnej polohy o uhol  $\varphi$ . Za kladnú orientáciu momentov považujeme kladné pootočené  $+\varphi$ . Namiesto pružín (väzieb) zakreslíme sily v pružinách  $F_1, F_2$ . Nosník (spolu s bodmi  $m_1, m_2$ ) pri jeho kmitaní vykonáva rotačný zrýchlený pohyb okolo stálej osi rotácie prechádzajúcej kĺbom  $A$ . Sústava má 1° voľnosti.

## 2. Dynamická pohybová rovnica (DPR) sústavy

Pre rotačný pohyb okolo osi prechádzajúcej bodom  $A$  bude DPR

$$\alpha I_A = \sum (M_i)_A \quad (1)$$

$$\ddot{\varphi} I_A = F_1 l - F_2 b.$$

Ak moment zotrvačnosti hmotných bodov  $m_1, m_2$  k osi prechádzajúcej bodom  $A$  je

$$I_A = m_1 l^2 + m_2 b^2$$

a sily v pružinách sú

$$F_1 = k_1 l \varphi, \quad F_2 = k_2 b \varphi,$$

potom po dosadení do (1) dostávame

$$(m_1 l^2 + m_2 b^2) \ddot{\varphi} + (k_1 l^2 + k_2 b^2) \varphi = 0.$$

Po úprave bude mať DPR tvar

$$\ddot{\varphi} + \frac{k_1 l^2 + k_2 b^2}{m_1 l^2 + m_2 b^2} \varphi = 0$$

Pre určenie  $\Omega_0, T_0, f_0$  nepotrebujeme riešiť diferenciálnu rovnicu. Výraz pri výchylke, t.j. pri  $\varphi$  je rovný druhej mocnine vlastnej kruhovej frekvencie

$$\Omega_0^2 = \frac{k_1 l^2 + k_2 b^2}{m_1 l^2 + m_2 b^2},$$

odkiaľ dostávame

$$\Omega_0 = 50,216 \text{ rads}^{-1}.$$

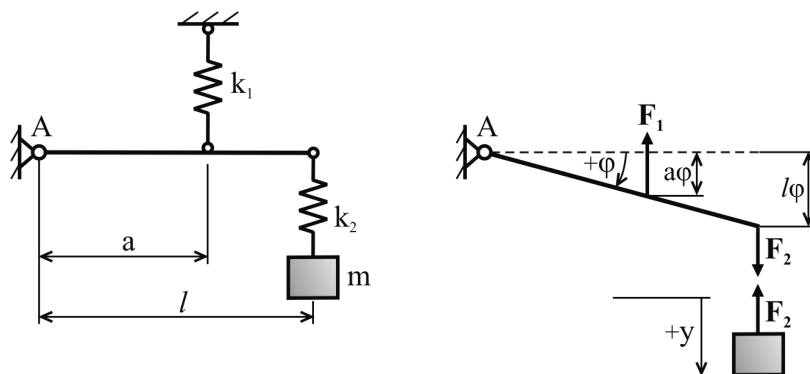
Tuhosti pritom dosadzujeme v základných jednotkách, teda  $k_1 = 40 \cdot 10^2 \text{ Nm}^{-1}$ ,  $k_2 = 60 \cdot 10^2 \text{ Nm}^{-1}$ .

Následne perióda vlastného netlmeného kmitania je  $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 0,125 \text{ s}$ , čo zodpovedá frekvencii  $f_0 = \frac{1}{T_0} = 7,99 \text{ s}^{-1} = 7,99 \text{ Hz}$ .

### Príklad 11.6

Bremeno o hmotnosti  $m$ , ktoré môžeme považovať za hmotný bod, je uchytené pružinou o tuhosti  $k_2$  k tuhému nosníku (jeho hmotnosť zanedbáme), ktorý je uchytený k rámu pružinou o tuhosti  $k_1$  a kĺbom  $A$ . Vypočítajte vlastnú kruhovú frekvenciu ( $\Omega_0$ ), periódu ( $T_0$ ) a frekvenciu voľného netlmeného kmitania bremena.

Dané hodnoty:  $m = 6 \text{ kg}$ ,  $l = 0,75 \text{ m}$ ,  $a = 0,2 \text{ m}$ ,  $k_1 = 15 \text{ Ncm}^{-1}$ ,  $k_2 = 20 \text{ Ncm}^{-1}$



Obr. 11.7

#### 1. Uvoľnenie

Vychýlime bremeno  $m$  z rovnovážnej polohy jeho posunutím o výchylku  $y$ . Tým sa prostredníctvom deformovanej (predĺženej) pružiny  $k_2$  nosník pootočí o uhol  $\varphi$  okolo kĺbu  $A$ . Namiesto pružín (väzieb) zakreslíme sily  $F_1$  a  $F_2$ , pričom v prípade sily  $F_2$  rešpektujeme zákon akcie a reakcie, pretože pružina  $k_2$  je vnútornou väzbou v sústave.

Bremeno ako hmotný bod vykonáva pri kmitaní priamočiary zrýchlený pohyb. Nosník koná rotačný zrýchlený pohyb okolo stálej osi rotácie prechádzajúcej kĺbom  $A$ . Výchylky  $+y$ ,  $+\varphi$  sú zároveň kladnými orientáciami pre veličiny v rovniciach.

Celok tvorí sústavu s dvomi stupňami voľnosti.

#### 2. Dynamické pohybové rovnice (DPR) sústavy

DPR bremena je

$$m\ddot{y} = \sum F_{iy} = -F_2 = -k_2(y - l\varphi), \quad (1)$$

DPR nosníka určíme z podmienky

$$\alpha I_A = \sum (M_i)_A,$$

Ak zanedbáme hmotnosť nosníka, pre jeho moment zotrvačnosti  $I_A$  platí  $I_A = 0$  a potom DPR nosníka bude mať tvar

$$0 = k_1 a^2 \varphi - k_2 (y - l \varphi) l. \quad (2)$$

Zo sústavy rovníc (1), (2) vyjadríme

$$m \ddot{y} = -k_2 \left( y - l \frac{k_2 l}{k_1 a^2 + k_2 l^2} \right),$$

odkiaľ po úprave dostávame

$$\ddot{y} + \frac{1}{m} \left( k_2 - \frac{k_2^2 l^2}{k_1 a^2 + k_2 l^2} \right) y = 0,$$

$$\ddot{y} + \left( \frac{k_1 k_2 a^2}{m(k_1 a^2 + k_2 l^2)} \right) y = 0$$

kde výraz pri výchylke  $y$  je druhá mocnina vlastnej uhlovej frekvencie voľného kmitania.

Vlastnú uhlovú frekvenciu bremena  $m$  potom vypočítame zo vzťahu

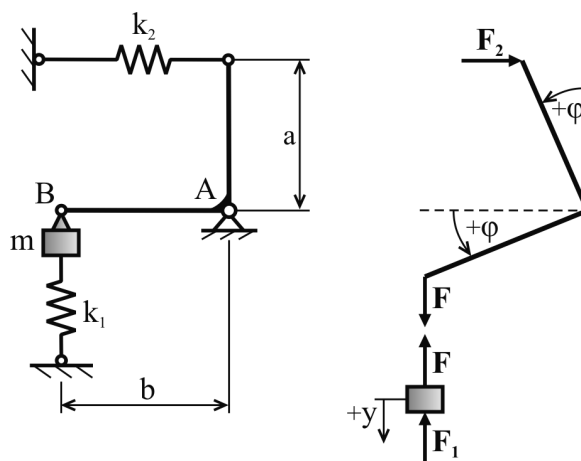
$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 k_2 a^2}{m(k_1 a^2 + k_2 l^2)}} = 4,069 \text{ rads}^{-1}.$$

Následne perióda netlmeného kmitania je  $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 1,5 \text{ s}$ , čo zodpovedá vlastnej frekvencii  $f_0 = \frac{1}{T_0} = 0,647 \text{ s}^{-1} = 0,647 \text{ Hz}$ .

### **Príklad 11.7**

Zalomená páka, ktorej hmotnosť môžeme zanedbať, je kĺbom  $B$  spojená s bremenom o hmotnosti  $m$ , ktoré je uhytené k rámu pružinou o tuhosti  $k_1$ . Páka je k rámu uchytená pružinou o tuhosti  $k_2$  a kĺbom  $A$ . Vypočítajte vlastnú kruhovú frekvenciu voľného kmitania páky, jej periódu a frekvenciu.

Dané hodnoty:  $m = 2 \text{ kg}$ ,  $a = 1 \text{ m}$ ,  $b = 0,5 \text{ m}$ ,  $k_1 = 20 \text{ Ncm}^{-1}$ ,  $k_2 = 40 \text{ Ncm}^{-1}$



**Obr. 11.8**

## 1. Uvoľnenie

Vychýlime páku z rovnovážnej polohy jej pootočením o uhol  $\varphi$ . Breno spojené s pákou kĺbom  $B$  sa posunie o výchylku  $y$  (tak, ako aj koniec páky v mieste  $B$ ). Namiesto pružín zakreslíme sily  $F_1$ ,  $F_2$ . Medzi pákou a bremenom uvažujeme silu  $F$ , pričom rešpektujeme zákon akcie a reakcie. Kladné znamienka  $+y$ ,  $+\varphi$  považujeme za kladné orientácie vonkajších síl v rovniciach.

## 2. Dynamické pohybové rovnice (DPR) sústavy

DPR bremena je

$$m\ddot{y} = -F_1 - F = -k_1 b \varphi - F, \quad (1)$$

DPR páky určíme z podmienky

$$\alpha \cdot I_A = \sum (M_i)_A,$$

Ak zanedbáme hmotnosť páky, pre jej moment zotrvačnosti  $I_A$  platí

$$I_A = 0,$$

a potom DPR páky bude mať tvar

$$0 = -k_2 a^2 \varphi + Fb. \quad (2)$$

Ak označíme  $y = b\varphi \Rightarrow \ddot{y} = b\ddot{\varphi}$ , potom po dosadení do rovnice (2), zo sústavy rovníc (1), (2) vieme vyjadriť DPR kmitania páky

$$mb\ddot{\varphi} + k_1 b \varphi + \frac{k_2 a^2}{b} \varphi = 0,$$

odkiaľ po úprave dostávame

$$\ddot{\varphi} + \frac{k_1 b^2 + k_2 a^2}{mb^2} \varphi = 0.$$

Výraz pri výchylke, t.j. pri  $\varphi$  je druhá mocnina vlastnej kruhovej frekvencie voľného kmitania páky

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 b^2 + k_2 a^2}{mb^2}} = 94,86 \text{ rads}^{-1}.$$

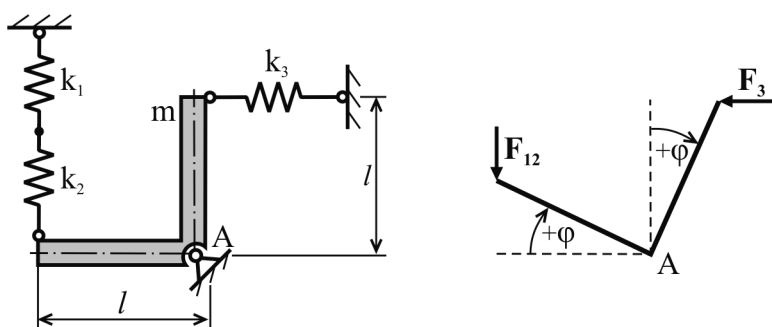
Následne perióda vlastného netlmeného kmitania je  $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 0,0662 \text{ s}$ , čo zodpovedá frekvencii  $f_0 = \frac{1}{T_0} = 15,098 \text{ s}^{-1} = 15,098 \text{ Hz}$ .

Tuhosti pružín  $k_1$ ,  $k_2$  dosadzujeme v základných jednotkách, t.j.  $k_1 = 20 \cdot 10^2 \text{ Nm}^{-1}$ ,  $k_2 = 40 \cdot 10^2 \text{ Nm}^{-1}$ .

### **Príklad 11.8**

Tuhý nosník o hmotnosti  $m$  je otočne uložený v kĺbe  $A$ . K rámu je uchytený pružinami o tuhostiach  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$ . Vypočítajte vlastnú kruhovú frekvenciu, periódu a frekvenciu voľného kmitania nosníka.

Dané hodnoty:  $m = 50 \text{ kg}$ ,  $l = 2 \text{ m}$ ,  $k_1 = 30 \text{ Ncm}^{-1}$ ,  $k_2 = 40 \text{ Ncm}^{-1}$ ,  $k_3 = 35 \text{ Ncm}^{-1}$



Obr. 11.9

#### 1. Uvoľnenie

Nosník vychýlime z rovnovážnej polohy jeho pootočením o uhol  $\varphi$  okolo kĺbu  $A$ . Namiesto pružín zakreslíme sily v nich  $F_{12}$ ,  $F_3$ . Pružiny  $k_1$  a  $k_2$  sú radené do série. Nosník pri kmitaní koná zrýchlený rotačný pohyb okolo stálej osi rotácie prechádzajúcej kĺbom  $A$ .

#### 2. Dynamická pohybová rovnica (DPR) nosníka

$$\alpha I_A = \sum (M_i)_A, \quad (1)$$

$$\ddot{\varphi} I_A = -k_3 l^2 \varphi - k_{12} l^2 \varphi,$$

kde

$$k_{12} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}, \quad I_A = \frac{m l^2}{3}.$$

Po dosadení do (1) dostávame DPR v tvare

$$\ddot{\varphi} + \frac{3(k_{12} + k_3)}{m} \varphi = 0. \quad (2)$$

V rovnici (2) je výraz pri výchylke  $\varphi$  rovný druhej mocnine vlastnej kruhovej frekvencie voľného kmitania nosníka, teda



$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{3(k_{12} + k_3)}{m}} = 17,6877 \text{ rad s}^{-1}.$$

Následne perióda vlastného netlmeného kmitania je  $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 0,355 \text{ s}$ , čo zodpovedá frekvencii  $f_0 = \frac{1}{T_0} = 2,85 \text{ s}^{-1} = 2,85 \text{ Hz}$ .

V prípade, ak by bolo úlohou zostaviť DPR nosníka pri jeho kmitaní využitím Lagrangeovej rovnice II. druhu bez vplyvu síl tiaže časti nosníka (vodorovnej a vertikálnej), potom by Lagrangeova rovnica II. druhu pre tento typ úlohy mala tvar

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial E_k}{\partial q} + \frac{\partial E_p}{\partial q} = 0, \quad (3)$$

kde  $q$  je zovšeobecnená súradnica,

$\dot{q}$  zovšeobecnená rýchlosť,

$E_k$  kinetická energia,

$E_p$  potenciálna energia.

Za zovšeobecnenú súradnicu zvolíme uhol pootočenia nosníka, teda  $q = \varphi$ . Potom zovšeobecnená rýchlosť bude  $\dot{q} = \dot{\varphi}$ .

Kinetická energia pri rotačnom pohybe nosníka bude

$$E_k = \frac{I_A \omega^2}{2},$$

kde

$$I_A = \frac{ml^2}{3}, \quad \omega^2 = \dot{\varphi}^2,$$

potom

$$E_k = \frac{ml^2}{6} \dot{\varphi}^2.$$

Potenciálna energia je sústredená v deformovaných pružinách, teda

$$E_p = \frac{1}{2} k_{12} (s_{st,1,2} + s_{\varphi,1,2})^2 - \frac{1}{2} k_{12} s_{st,1,2}^2 + \frac{1}{2} k_3 (s_{st,3} + s_{\varphi,3})^2 - \frac{1}{2} k_3 s_{st,3}^2,$$

kde  $k_{12} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$  je výsledná tuhosť do série zoradených pružín,

$s_{st,1,2}$  statická deformácia pružín  $k_1, k_2$ ,

$s_{st,3}$  statická deformácia pružiny  $k_3$ ,

$s_{\varphi 1,2}$  deformácia pružín  $k_1, k_2$  po vychýlení nosníka z rovnovážnej polohy,

$s_{\varphi,3}$  deformácia pružiny  $k_3$  po vychýlení nosníka z rovnovážnej polohy.

Keďže  $s_{\varphi 1,2} = l\varphi$  a  $s_{\varphi,3} = l\varphi$  potom potenciálna energia bude

$$E_p = k_{12}s_{st,1,2}l\varphi + \frac{1}{2}k_{12}(l\varphi)^2 + k_3s_{st,3}l\varphi + \frac{1}{2}k_3(l\varphi)^2.$$

Pre začiatočné podmienky t.j. pri rovnováhe odpovedajúcej statickým deformáciám pružín musí platiť

$$\left( \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0} = 0,$$

potom

$$\left( \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=0} = k_{12}s_{st,1,2}l + k_{12}l^2\varphi + k_3s_{st,3}l + k_3l^2\varphi = 0,$$

keďže  $\varphi = 0$

$$k_{12}s_{st,1,2}l + k_3s_{st,3}l = 0.$$

Následne pre potenciálnu energiu sústavy dostávame vzťah

$$E_p = \frac{1}{2}k_{12}(\varphi l)^2 + \frac{1}{2}k_3(\varphi l)^2.$$

Po dosadení parciálnych derivácií potenciálnej a kinetickej energie

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial \varphi} &= k_{12}l^2\varphi + k_3l^2\varphi, \\ \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} &= 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{ml^2}{3}\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi}, \end{aligned}$$

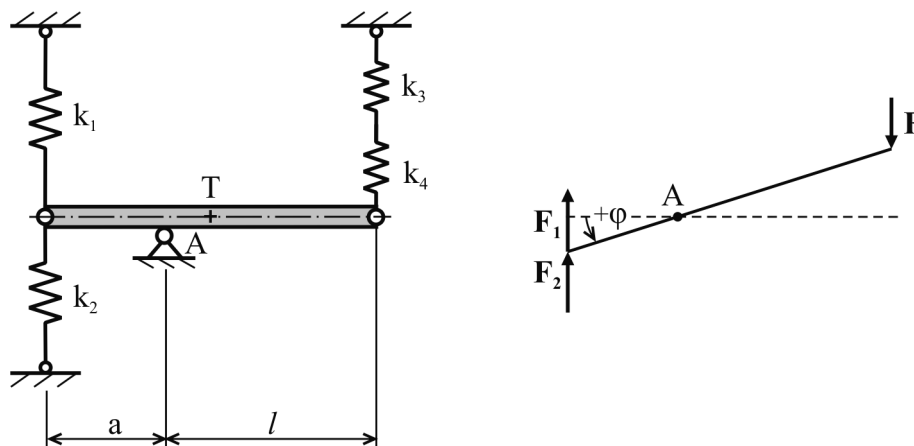
do rovnice (3) dostávame DPR nosníka pri jeho kmitaní (rotačnom)

$$\begin{aligned} \frac{ml}{3}\ddot{\varphi} + (k_{12}l + k_3l)\varphi &= 0, \\ \ddot{\varphi} + \varphi \frac{3(k_{12} + k_3)}{m} &= 0. \end{aligned}$$

### **Príklad 11.9**

Tuhý nosník o hmotnosti  $m$  je otočne uložený v kĺbe  $A$  a uchytený k rámu pružinami o tuhostiach  $k_1, k_2, k_3, k_4$ . Vypočítajte vlastnú kruhovú frekvenciu, periódu a frekvenciu jeho voľného kmitania.

Dané hodnoty:  $m = 20 \text{ kg}$ ,  $a = 1 \text{ m}$   $l = 2 \text{ m}$ ,  $k_1 = 50 \text{ Ncm}^{-1}$ ,  $k_2 = 40 \text{ Ncm}^{-1}$ ,  
 $k_3 = 35 \text{ Ncm}^{-1}$ ,  $k_4 = 60 \text{ Ncm}^{-1}$



Obr. 11.10

### 1. Uvoľnenie

Vychýlime nosník z rovnovážnej polohy jeho pootočením okolo kĺbu  $A$  o uhol  $\varphi$ . Namiesto pružín zakreslíme sily  $F_1$ ,  $F_2$  a  $F$ , pričom pružiny  $k_3$ ,  $k_4$  sú radené do série. Za kladnú orientáciu momentov v rovnici považujeme kladnú orientáciu pootočenia  $+\varphi$ . Nosník pri kmitaní vykonáva zrýchlený rotačný pohyb okolo stálej osi rotácie prechádzajúcej kĺbom  $A$ .

### 2. Dynamická pohybová rovnica (DPR) nosníka

$$\alpha I_A = \sum (M_i)_A, \quad (1)$$

$$\ddot{\varphi} I_A = -k_1 a^2 \varphi - k_2 a^2 \varphi - k l^2 \varphi,$$

$$\text{kde } k = \frac{k_3 k_4}{k_3 + k_4}.$$

Pomocou Steinerovej vety určíme moment zotrvačnosti nosníka k osi prechádzajúcej bodom  $A$

$$I_A = I_T + m \left( \frac{l-a}{2} \right)^2,$$

$$I_A = \frac{m(a+l)^2}{12} + m \left( \frac{l-a}{2} \right)^2.$$

Po dosadení a úprave dostávame DPR v tvare

$$\ddot{\varphi} + \frac{a^2(k_1 + k_2) + \frac{k_3 k_4}{k_3 + k_4} l^2}{I_A} \varphi = 0$$

Výraz pri výchylke  $\varphi$  sa rovná druhej mocnine vlastnej kruhovej frekvencie voľného kmitania nosníka, teda

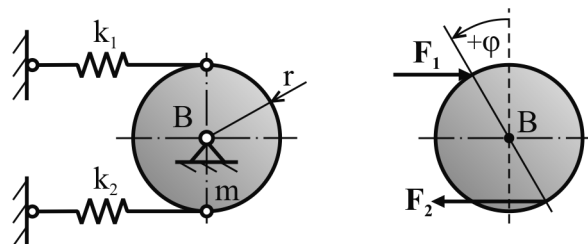
$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{a^2(k_1 + k_2) + \frac{k_3 k_4}{k_3 + k_4} l^2}{\frac{m}{4} \left[ \frac{(a+l)^2}{3} + (l-a)^2 \right]}} = 29,86 \text{ rads}^{-1}.$$

Následne perióda vlastného netlmeného kmitania je  $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 0,21 \text{ s}$ , čo zodpovedá frekvencii  $f_0 = \frac{1}{T_0} = 4,76 \text{ s}^{-1} = 4,76 \text{ Hz}$ .

### **Príklad 11.10**

Vypočítajte vlastnú kruhovú frekvenciu kmitavého pohybu tuhého homogénneho kotúča o hmotnosti  $m$ , ktorý je uložený v ložisku  $B$  a uchytený k rámu pružinami o tuhostiach  $k_1, k_2$ .

Dané hodnoty:  $m = 10 \text{ kg}$ ,  $k_1 = 300 \text{ Nm}^{-1}$ ,  $k_2 = 200 \text{ Nm}^{-1}$



Obr. 11.11

#### 1. Uvoľnenie

Vychýlime kotúč z rovnovážnej polohy jeho pootočením o uhol  $\varphi$  okolo osi prechádzajúcej ložiskom  $B$ . Namiesto pružín zakreslíme sily v nich  $F_1, F_2$ . Za kladnú orientáciu momentov v rovnici považujeme kladné znamienko uhla pootočenia  $\varphi$ .

Kotúč pri kmitaní vykonáva rotačný zrýchlený pohyb okolo stálej osi rotácie prechádzajúcej bodom  $B$ .

#### 2. Dynamická pohybová rovnica (DPR)

$$\alpha I_B = \sum (M_i)_B, \quad (1)$$

$$\ddot{\varphi} I_B = -F_1 r - F_2 r = -k_1 r^2 \varphi - k_2 r^2 \varphi,$$

kde  $F_1 = k_1 r \varphi$ ,  $F_2 = k_2 r \varphi$ .

Moment zotrvačnosti tenkého homogénneho kotúča k osi, ktorá prechádza jeho ťažiskom a je kolmá na rovinu kotúča, vypočítame zo vzťahu

$$I_B = \frac{mr^2}{2}.$$

Po dosadení do DPR a úprave dostávame

$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{m}(k_1 + k_2)\varphi = 0.$$

Výraz pri výchylke  $\varphi$  je druhou mocninou vlastnej kruhovej frekvencie voľného kmitania kotúča, teda

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{2}{m}(k_1 + k_2)} = 10 \text{ rads}^{-1}.$$

Následne perióda vlastného netlmeného kmitania je  $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 0,628 \text{ s}$ , čo zodpovedá frekvencii  $f_0 = \frac{1}{T_0} = 1,59 \text{ s}^{-1} = 1,59 \text{ Hz}$ .

### **Príklad 11.11**

Napíšte dynamickú pohybovú rovnicu (DPR) pre úlohu z príkladu 11.10 s využitím Lagrangeovej rovnice II. druhu.

Pre túto úlohu má Lagrangeova rovnica II. druhu tvar

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial E_k}{\partial q} + \frac{\partial E_p}{\partial q} = 0, \quad (1)$$

kde  $q$  je zovšeobecnená súradnica,

$\dot{q}$  zovšeobecnená rýchlosť,

$E_k$  kinetická energia,

$E_p$  potenciálna energia.

Za zovšeobecnenú súradnicu zvolíme pootočenie kotúča o uhol  $\varphi$ , teda  $q = \varphi$ .

Potom zovšeobecnená rýchlosť bude  $\dot{q} = \dot{\varphi}$ .

Kinetická energia kotúča pri jeho rotačnom pohybe bude

$$E_k = \frac{I_A \omega^2}{2} = \frac{mr^2}{2} \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2.$$

Pre potenciálnu energiu v pružinách  $k_1$ ,  $k_2$  bude platiť

$$E_p = \frac{1}{2}k_1(s_{st_1} + s_{\varphi_1})^2 - \frac{1}{2}k_1s_{st_1}^2 + \frac{1}{2}k_2(s_{st_2} + s_{\varphi_2})^2 - \frac{1}{2}k_2s_{st_2}^2,$$

kde  $s_{st_1}$  je statická deformácia pružiny,

$s_{\varphi} = s_{\varphi_1} = r\varphi$  sú deformácie pružín pri pootočení o uhol  $\varphi$ ,

potom

$$E_p = r\varphi(k_1s_{st_1} + k_2s_{st_2}) + \frac{r^2\varphi^2}{2}(k_1 + k_2).$$

Pre začiatočné podmienky t.j. pri rovnováhe odpovedajúcej statickým deformáciám pružín musí platiť

$$\left(\frac{\partial E_p}{\partial \varphi}\right)_{\varphi=0} = 0,$$

potom

$$r(k_1s_{st_1} + k_2s_{st_2}) + r^2\varphi(k_1 + k_2) = 0,$$

keďže  $\varphi = 0$

$$r(k_1s_{st_1} + k_2s_{st_2}) = 0.$$

Následne pre potenciálnu energiu sústavy dostávame vzťah

$$E_p = \frac{r^2\varphi^2}{2}(k_1 + k_2).$$

Po dosadení parciálnych derivácií potenciálnej a kinetickej energie

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi} = r^2\varphi(k_1 + k_2),$$

$$\frac{\partial E_k}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{mr^2\dot{\varphi}}{2}, \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{mr^2\ddot{\varphi}}{2}.$$

do rovnice (1) dostávame DPR kotúča v tvare

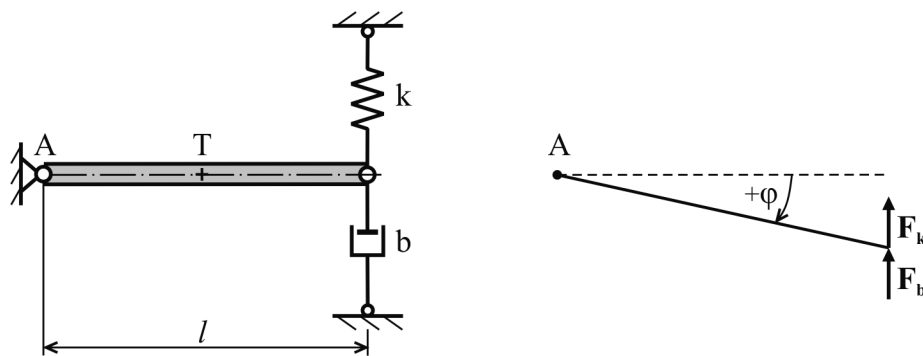
$$\ddot{\varphi} + \frac{2}{m}(k_1 + k_2)\varphi = 0,$$

čo odpovedá riešeniu z predchádzajúceho príkladu.

### **Príklad 11.12**

Tuhý nosník o hmotnosti  $m$  je uložený otočne v kĺbe  $A$  a uchytený pružinou o tuhosti  $k$  a tlmičom s koeficientom viskózneho odporu  $b$ . Vypočítajte vlastnú kruhovú frekvenciu, periódu a frekvenciu tlmeného kmitania nosníka.

Dané hodnoty:  $m = 30 \text{ kg}$ ,  $l = 2 \text{ m}$ ,  $k = 100 \text{ Ncm}^{-1}$ ,  $b = 100 \text{ kg.s}^{-1}$



Obr. 11.12

### 1. Uvoľnenie

Vychýlime nosník z rovnovážnej polohy jeho pootočením okolo kĺbu  $A$  o uhol  $\varphi$ . Namiesto pružiny a tlmiča zakreslíme silu v pružine  $F_k$  a silu v tlmiči  $F_b$ . Za kladnú orientáciu momentov v rovnici považujeme kladné znamienko výchylky  $\varphi$ .

Nosník pri kmitaní vykonáva rotačný zrýchlený pohyb okolo stálej osi rotácie prechádzajúcej bodom  $A$ .

### 2. Dynamická pohybová rovnica (DPR) nosníka

$$\alpha I_A = \sum (M_i)_A, \quad (1)$$

$$\ddot{\varphi} I_A = -F_k l - F_b l,$$

kde  $F_k = kl\varphi$ ,  $F_b = bl\dot{\varphi}$ .

Pomocou Steinerovej vety určíme moment zotrvačnosti nosníka k osi prechádzajúcej bodom  $A$

$$I_A = I_T + m \frac{l^2}{4} = \frac{ml^2}{12} + \frac{ml^2}{4} = \frac{ml^2}{3}.$$

Po dosadení do rovnice (1) dostávame DPR nosníka

$$\frac{ml^2}{3} \ddot{\varphi} + bl^2 \dot{\varphi} + kl^2 \varphi = 0,$$

ktorú upravíme do tvaru

$$\ddot{\varphi} + \frac{3b}{m} \dot{\varphi} + \frac{3k}{m} \varphi = 0,$$

kde výraz pri prvej derivácii výchylky  $\dot{\varphi}$  je dvojnásobok konštanty útlmu

$$2\delta = \frac{3b}{m}, \quad \text{odkiaľ} \quad \delta = 5 \text{ s}^{-1}.$$

Výraz pri výchylke  $\varphi$  je druhou mocninou vlastnej kruhovej frekvencie netlmeného kmitania nosníka

$$\Omega_0^2 = \frac{3k}{m}, \quad \text{odkiaľ} \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m}} = 31,62 \text{ rad s}^{-1}.$$

Pretože v tomto prípade je  $\Omega_0 > \delta$ , ide o prípad podkritického tlmenia.

Vlastnú kruhovú frekvenciu tlmeného kmitania nosníka potom vypočítame podľa vzťahu

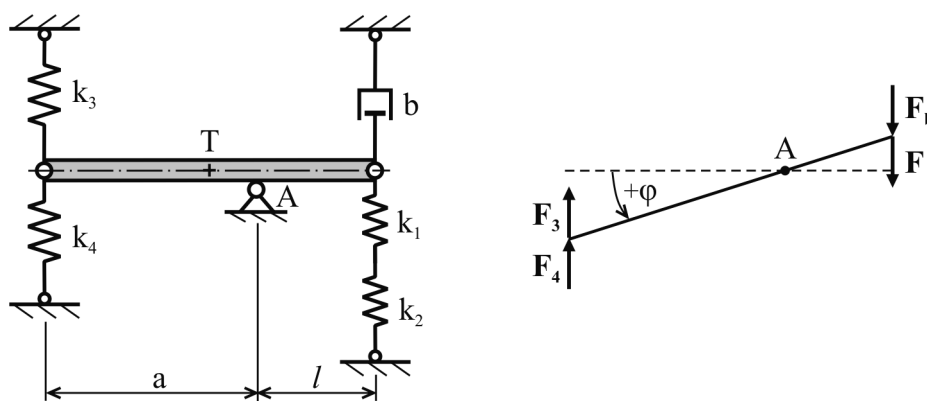
$$\Omega_d = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2} = 31,22 \text{ rad s}^{-1},$$

Následne perióda tlmeného kmitania je  $T_d = \frac{2\pi}{\Omega_d} = 0,201 \text{ s}$ , čomu zodpovedá frekvencia tlmeného kmitania  $f_d = \frac{1}{T_d} = 4,96 \text{ s}^{-1} = 4,96 \text{ Hz}$ .

### **Príklad 11.13**

Tuhý nosník o hmotnosti  $m$  je uložený otočne v kĺbe  $A$ . Pomocou pružín o tuhostiach  $k_1, k_2, k_3, k_4$  a tlmiča s koeficientom viskózneho odporu  $b$  je uchytený k tuhým stenám. Vypočítajte vlastnú kruhovú frekvenciu, periódu a frekvenciu tlmeného kmitania nosníka.

Dané hodnoty:  $m = 60 \text{ kg}$ ,  $a = 3 \text{ m}$ ,  $l = 2 \text{ m}$ ,  $k_1 = 60 \text{ N cm}^{-1}$ ,  $k_2 = 30 \text{ N cm}^{-1}$ ,  $k_3 = 20 \text{ N cm}^{-1}$ ,  $k_4 = 25 \text{ N cm}^{-1}$ ,  $b = 250 \text{ kgs}^{-1}$



**Obr. 11.13**

#### **1. Uvoľnenie**

Vychýlime nosník z rovnovážnej polohy jeho pootočením okolo kĺbu  $A$  o uhol  $\varphi$ . Namiesto pružín zakreslíme sily  $F_3, F_4$  a  $F$ , namiesto tlmiča silu  $F_b$ . Pružiny  $k_1, k_2$  sú radené do série. Nosník pri kmitaní vykonáva rotačný zrýchlený pohyb okolo stálej osi rotácie prechádzajúcej bodom  $A$ .



## 2. Dynamická pohybová rovnica (DPR) nosníka

$$\alpha I_A = \sum (M_i)_A \quad (1)$$

$$\ddot{\varphi} I_A = -F_3 a - F_4 a - Fl - F_b l,$$

$$\text{kde } F_3 = k_3 a \varphi, \quad F_4 = k_4 a \varphi, \quad F = k_{12} l \varphi, \quad F_b = bl \dot{\varphi}.$$

Moment zotrvačnosti nosníka k osi prechádzajúcej bodom  $A$  určíme pomocou Steinerovej vety

$$I_A = I_T + m \left( \frac{a-l}{2} \right)^2 = \frac{m(a+l)^2}{12} + m \left( \frac{a-l}{2} \right)^2.$$

Po dosadení do rovnice (1) dostávame DPR nosníka v tvare

$$\ddot{\varphi} + \frac{bl^2}{I_A} \dot{\varphi} + \frac{k_3 a^2 + k_4 a^2 + k_{12} l^2}{I_A} \varphi = 0.$$

Výraz pri prvej derivácii výchylky  $\dot{\varphi}$  je dvojnásobok konštanty útlmu  $\delta$ , teda

$$2\delta = \frac{bl^2}{I_A}, \quad \text{odkiaľ } \delta = 3,571 \text{ s}^{-1}.$$

Výraz pri výchylke  $\varphi$  je druhá mocnina vlastnej kruhovej frekvencie netlmeného kmitania nosníka, teda

$$\Omega_0^2 = \frac{k_3 a^2 + k_4 a^2 + k_{12} l^2}{I_A}, \quad \text{odkiaľ } \Omega_0 = \sqrt{\frac{a^2(k_3 + k_4) + \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} l^2}{I_A}} = 18,61 \text{ rad.s}^{-1}.$$

Pretože  $\Omega_0 > \delta$ , ide o prípad podkritického tlmenia.

Vlastnú kruhovú frekvenciu tlmeného kmitania nosníka potom vypočítame podľa vzťahu

$$\Omega_d = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2} = 18,266 \text{ rad.s}^{-1}.$$

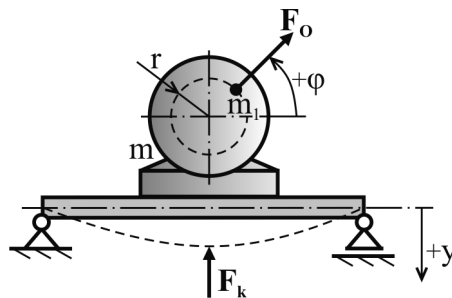
Následne perióda tlmeného kmitania je  $T_d = \frac{2\pi}{\Omega_d} = 0,3439 \text{ s}$ , čo zodpovedá frekvencii

$$f_d = \frac{1}{T_d} = 2,907 \text{ s}^{-1} = 2,907 \text{ Hz}.$$

### **Príklad 11.14**

Na pružnom nosníku, ktorého hmotnosť nebudeme uvažovať, je uložený rotačný stroj o hmotnosti  $m$ . Vo vzdialenosti  $r$  od osi stroja sa nachádza nevyvážok  $m_1$ . Statický priehyb nosníka od tiaže stroja je  $\delta_{st}$ . Určte, pri akých otáčkach dôjde k rezonančnému javu.

Dané hodnoty:  $m = 60 \text{ kg}$ ,  $m_1 = 0,1 \text{ kg}$ ,  $r = 0,2 \text{ m}$ ,  $\delta_{st} = 5 \text{ mm}$



Obr. 11.14

### 1. Uvoľnenie

Pri rotácii stroja na jeho nevývažok pôsobí odstredivá sila  $F_0$ . Sústava pri kmitaní vykonáva priamočiary zrýchlený pohyb, pričom nosník sa správa ako pružina.

### 2. Dynamická pohybová rovnica (DPR) sústavy

$$ma_y = \sum F_{iy}, \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = -F_K - F_0 \sin \varphi = -ky - F_0 \sin(\omega t),$$

pretože odstredivá sila je  $F_0 = m_1 a_n = m_1 r \omega^2$ , potom DPR bude

$$\ddot{y} + \frac{k}{m} y = -\frac{m_1}{m} r \omega^2 \sin(\omega t). \quad (2)$$

Podmienkou, aby nastala rezonancia je, aby sa budiaca frekvencia ( $\omega$ ) a vlastná frekvencia sústavy ( $\Omega_0$ ) rovnali, teda  $\omega = \Omega_0$ .

Výraz pri výchylke  $y$  v rovnici (2) je druhá mocnina vlastnej uhlovej frekvencie sústavy, takže platí

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{k}{G}} g = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}},$$

kde  $\frac{G}{k} = \delta_{st}$ .

Budiacu kruhovú frekvenciu od rotácie stroja vypočítame zo vzťahu

$$\omega = \frac{\pi n}{30}.$$

Ak  $\omega = \Omega_0$ , potom

$$\frac{\pi n_r}{30} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}, \quad \text{odkiaľ} \quad n_r = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}},$$

kde  $n_r$  sú otáčky stroja, pri ktorých nastane rezonancia.

V tabuľke 10.1 sú uvedené hodnoty rezonančných otáčok pre rôzne hodnoty statického priehybu nosníka  $\delta_{st}$ .

**Tabuľka 10.1**

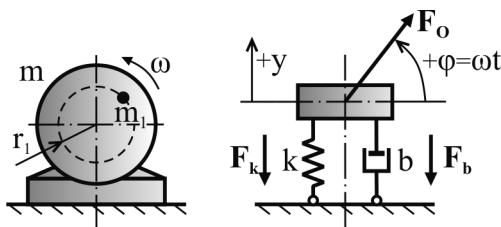
$\delta_{st}$ [mm]	$n_r$ [min <sup>-1</sup> ]
5	422,98
1	945,8
0,5	1337,58

Z tabuľky 10.1 vyplýva, že čím je nosník tuhší (menšia deformácia), rezonančné otáčky sa posúvajú vyššie.

### **Príklad 11.15**

Rotačný motor o hmotnosti  $m$  je uložený na základovej doske, ktorej fyzikálne vlastnosti sú popísané tuhosťou  $k$  a koeficientom viskózneho odporu  $b$ . Nevývažok na rotujúcej časti motora je  $m_1$  na polomere  $r_1$  od osi rotácie. Pohyb motora je možný len vo zvislom smere. Vypočítajte amplitúdu jeho kmitania.

Dané hodnoty:  $m = 50$  kg,  $m_1 = 0,1$  kg,  $r_1 = 0,2$  m,  $n = 1200$  min<sup>-1</sup>,  $k = 5 \cdot 10^4$  Nm<sup>-1</sup>,  $b = 50$  kgs<sup>-1</sup>



**Obr. 11.15**

#### 1. Uvoľnenie

Pri otáčaní motora na jeho nevývažok pôsobí odstredivá sila  $F_0$ . Namiesto základu zakreslíme silu  $F_k$  charakterizujúcu jeho pružné vlastnosti a silu  $F_b$  charakterizujúcu jeho tlmiace vlastnosti.

Motor pri kmitaní vykonáva priamočiary zrýchlený pohyb v smere osi  $y$ .

#### 2. Dynamická pohybová rovnica (DPR)

$$ma_y = \sum F_{iy}, \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = -F_k - F_b + F_0 \sin(\omega t),$$

kde  $F_k = ky$ ,  $F_b = b\dot{y}$ ,  $F_0 = m_1 a_n = m_1 r_1 \omega^2$ .

Potom DPR bude

$$\ddot{y} + \frac{b}{m} \dot{y} + \frac{k}{m} y = \frac{m_1}{m} r_1 \omega^2 \sin(\omega t). \quad (2)$$

Výraz pri prvej derivácii výchylky  $\dot{y}$  v rovnici (2) je dvojnásobok konštanty útlmu, teda

$$2\delta = \frac{b}{m}, \quad \text{odkiaľ} \quad \delta = 0,5 \text{ s}^{-1}.$$

Výraz pri výchylke  $y$  v rovnici (2) je druhá mocnina vlastnej uhlovej frekvencie netlmeného kmitania, teda

$$\Omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \text{odkiaľ} \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 31,622 \text{ rads}^{-1}.$$

Riešenie diferenciálnej rovnice (2) predpokladajme v tvare

$$y = y_1 + y_2,$$

kde  $y_1$  je všeobecné riešenie homogénnej diferenciálnej rovnice, čo fyzikálne predstavuje vlastné kmitanie, ktoré sa časom (veľmi rýchlo) utlmí. Potom  $y \approx y_2$ , čo je partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice.

Partikulárne riešenie diferenciálnej rovnice predpokladajme v tvare

$$y_2 = s \sin(\omega t - \varphi),$$

potom

$$\dot{y}_2 = s \omega \cos(\omega t - \varphi),$$

$$\ddot{y}_2 = s \omega^2 \sin(\omega t - \varphi).$$

Po dosadení do rovnice (2) a úprave bude amplitúda kmitania

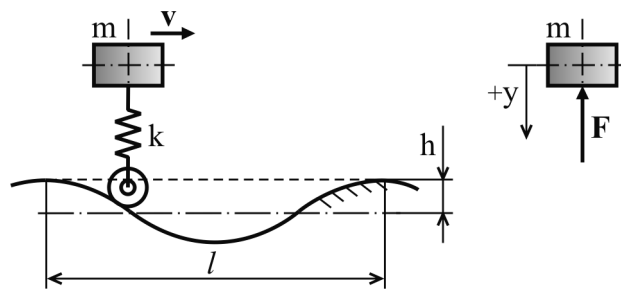
$$s = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2 \omega^2}} = \frac{m_1 r_1 \omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2 \omega^2}},$$

odkiaľ po dosadení za  $\omega = \frac{2\pi n}{60}$  dostávame  $s = 4,27 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ .

### **Príklad 11.16**

Bremeno o hmotnosti  $m$  sa pohybuje po zvlnenej ceste. Perióda zvlnenia je  $l$ , výška  $h$ . Vypočítajte rýchlosť  $v_r$ , pri ktorej vznikne rezonancia.

Dané hodnoty:  $m = 1100 \text{ kg}$ ,  $l = 0,3 \text{ m}$ ,  $h = 2 \text{ cm}$ ,  $k = 50 \cdot 10^2 \text{ Nm}^{-1}$



Obr. 11.16

### 1. Uvoľnenie

Bremeno vychýlime posunutím o výchylku  $y$  a pružinu nahradíme silou  $F$ . Bremeno pri kmitaní vykonáva priamočiary zrýchlený pohyb. Vplyvom nerovnosti podkladu dochádza ku kinematickému budeniu.

### 2. Dynamická pohybová rovnica (DPR)

$$ma_y = \sum F_{iy}, \quad (1)$$

$$m\ddot{y} = -F = -k(y - y_B),$$

$$\text{kde } y_B = h \sin \varphi = h \sin(\omega t) = h \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) = h \sin\left(\frac{2\pi v}{l} t\right),$$

$$T = \frac{l}{v}.$$

Po dosadení do DPR dostávame

$$\ddot{y} + \frac{k}{m} y = \frac{kh}{m} \sin\left(\frac{2\pi v}{l} t\right).$$

Výraz pri výchylke  $y$  je druhá mocnina vlastnej kruhovej frekvencie voľného kmitania, teda

$$\Omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad \text{odkiaľ} \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Rezonancia nastane, ak sa bude budiaca frekvencia rovnat vlastnej frekvencii. Teda ak  $\omega = \Omega_0$ , potom

$$\frac{2\pi v_r}{l} = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

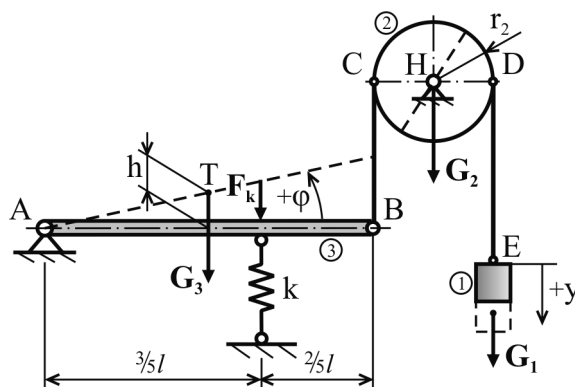
odkiaľ rýchlosť, pri ktorej nastane rezonancia bude

$$v_r = \frac{l}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = 1,017 \cdot 10^{-1} \text{ ms}^{-1}.$$

### **Príklad 11.17**

Tuhý nosník o hmotnosti  $m_3$  je otočne uložený v kĺbe A. Prútom  $BC$ , ktorého hmotnosť zanedbáme, je spojený s homogénnym kotúčom o hmotnosti  $m_2$ . Ten je prútom  $DE$  spojený s bremenom o hmotnosti  $m_1$ . Vypočítajte kruhovú frekvenciu, amplitúdu a periódu malých voľných kmitov bremena 1. Určte, ako sa s časom mení výchylka  $y(t)$ .

Dané hodnoty:  $m_1 = 1\text{ kg}$ ,  $m_2 = 2\text{ kg}$ ,  $m_3 = 3\text{ kg}$ ,  $k = 30\text{ Ncm}^{-1}$ , začiatočné podmienky:  $y_{01} = 0,4\text{ cm}$ ,  $\dot{y}_{01} = 7\text{ cm.s}^{-1}$



Obr. 11.17

#### 1. Uvoľnenie

Vychýlime bremeno 1 z rovnovážnej polohy (t.j. po statickej deformácii pružiny) jeho posunutím o výchylku  $y$ . Kotúč 2 sa pootočí okolo ložiska  $H$  a nosník 3 okolo kĺbu A. Namiesto pružiny zakreslíme silu v nej  $F$ . Sily tiaží  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  pôsobia v ťažiskách členov 1, 2, 3. Pri kmitaní bremeno 1 vykonáva priamočiary zrýchlený pohyb, kotúč 2 rotačný zrýchlený pohyb okolo stálej osi rotácie prechádzajúcej bodom  $H$  a nosník 3 rotačný zrýchlený pohyb okolo stálej osi rotácie prechádzajúcej bodom A. Sústava má 1 stupeň voľnosti.

#### 2. Dynamická pohybová rovnica sústavy

DPR napíšeme s využitím Lagrangeovej rovnice II. druhu, ktorá má pre tento typ úloh tvar

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial E_k}{\partial q} + \frac{\partial E_p}{\partial q} = 0, \quad (1)$$

kde  $q$  je zovšeobecnená súradnica,

$\dot{q}$  zovšeobecnená rýchlosť,

$E_k$  kinetická energia,

$E_p$  potenciálna energia.

Za zovšeobecnenú súradnicu zvolíme posunutie bremena 1, teda  $q = y_1$ . Derivovaním zovšeobecnenej súradnice následne dostávame zovšeobecnenú rýchlosť t.j.  $\dot{q} = \dot{y}_1$ .

Potom rovnica (1) bude

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}_1} - \frac{\partial E_k}{\partial y_1} + \frac{\partial E_p}{\partial y_1} = 0. \quad (2)$$

Kinetická energia sústavy vo funkcii rýchlosti  $\dot{y}_1$  člena 1 je vyjadrená súčtom

$$E_k = \sum E_{ki} = E_{k_1} + E_{k_2} + E_{k_3}, \quad (3)$$

kde kinetická energia jednotlivých členov

$$E_{k_1} = \frac{m_1 v_1^2}{2},$$

$$E_{k_2} = \frac{I_2 \omega_2^2}{2},$$

$$E_{k_3} = \frac{I_A \omega_3^2}{2},$$

Po dosadení za

$$I_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2},$$

$$\dot{y}_1 = \omega_2 r_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{\dot{y}_1}{2},$$

$$I_A = \frac{m_3 l^2}{3},$$

$$v_D = v_1 = \dot{y}_1 = v_B = v_C = \omega_3 l \Rightarrow \omega_3 = \frac{v_B}{l} = \frac{\dot{y}_1}{l}$$

dostávame

$$E_{k_1} = \frac{m_1 \dot{y}_1^2}{2},$$

$$E_{k_2} = \frac{1}{4} m_2 \dot{y}_1^2,$$

$$E_{k_3} = \frac{1}{6} m_3 \dot{y}_1^2.$$

Po dosadení do rovnice (3) a úprave bude kinetická energia sústavy

$$E_k = \dot{y}_1^2 \left( \frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{4} + \frac{m_3}{6} \right).$$

Potenciálna energia sústavy je daná súčtom

$$E_p = \sum E_{p_i} = E_{p_1} + E_{p_2} + E_{p_3} + E_{p_k},$$

kde potenciálna energia jednotlivých členov

$$E_{p_1} = -G_1 y_1,$$

$$E_{p_2} = 0,$$

$$E_{p_3} = G_3 h = G_3 \frac{y_1}{2}, \text{ pretože } h = \frac{y_1}{2},$$

a potenciálna energia v pružine  $k$

$$E_{p_k} = \frac{1}{2} k (s_{st} + s_{y_1})^2 - \frac{1}{2} k s_{st}^2, \quad (4)$$

kde  $s_{st}$  je statická deformácia pružiny,

$s_{y_1}$  deformácia pružiny po vychýlení z rovnovážnej polohy.

Ak  $y_1 = l\varphi$ , potom

$$s_{y_1} = \frac{3}{5} l \varphi = \frac{3}{5} y_1.$$

Po dosadení do (4) bude potenciálna energia v pružine  $k$

$$E_{p_k} = \frac{3}{5} k s_{st} y_1 + \frac{1}{50} k y_1^2.$$

Celková potenciálna energia sústavy je

$$E_p = -G_1 y_1 + \frac{G_3}{2} y_1 + \frac{3}{5} k s_{st} y_1 + \frac{1}{50} k y_1^2.$$

Ak je sústava v rovnováhe, potom platí

$$\left( \frac{\partial E_p}{\partial y_1} \right)_{y_1=0} = 0,$$

teda

$$\frac{\partial E_p}{\partial y_1} = -G_1 + \frac{G_3}{2} + \frac{3}{5} k s_{st} + \frac{1}{25} k y_1 = 0,$$

keďže  $y_1 = 0$

$$-G_1 + \frac{G_3}{2} + \frac{3}{5} k s_{st} = 0.$$

Následne pre potenciálnu energiu sústavy dostávame vzťah

$$E_p = \frac{1}{50} k y_1^2.$$

Ak vykonáme príslušné derivácie,



$$\begin{aligned}\frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}_1} &= 2\dot{y}_1 \left( \frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{4} + \frac{m_3}{6} \right), \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial E_k}{\partial \dot{y}_1} &= 2\ddot{y}_1 \left( \frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{4} + \frac{m_3}{6} \right), \\ \frac{\partial E_k}{\partial y_1} &= 0, \quad \frac{\partial E_p}{\partial y_1} = \frac{1}{25}ky_1,\end{aligned}$$

potom po dosadení do rovnice (2) dostávame

$$2 \left( \frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{4} + \frac{m_3}{6} \right) \ddot{y}_1 + \frac{1}{25}ky_1 = 0,$$

odkiaľ po úprave bude DPR sústavy

$$\ddot{y}_1 + \frac{k}{50 \left( \frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{4} + \frac{m_3}{6} \right)} y_1 = 0. \quad (5)$$

V rovnici (5) je výraz pri výchylke  $y_1$  rovný druhej mocnina vlastnej kruhovej frekvencie, teda

$$\Omega_0^2 = \frac{k}{50 \left( \frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{4} + \frac{m_3}{6} \right)}, \quad \text{odkiaľ} \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{50 \left( \frac{m_1}{2} + \frac{m_2}{4} + \frac{m_3}{6} \right)}} = 6,32 \text{ rads}^{-1}.$$

Potom perióda vlastného kmitania je  $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 9,99 \text{ s}$ , čo zodpovedá frekvencii

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = 1,0065 \text{ s}^{-1} = 1,0065 \text{ Hz}.$$

DPR bremena 1 je teda

$$\ddot{y}_1 + \Omega_0^2 y_1 = 0. \quad (6)$$

Ak ju chceme riešiť, potom charakteristická rovnica je

$$\lambda^2 + \Omega_0^2 = 0, \quad \text{odkiaľ} \quad \lambda_{1,2} = \pm i\Omega_0.$$

Riešenie diferenciálnej rovnice predpokladáme v tvare

$$y_1 = C_1 \cos(\Omega_0 t) + C_2 \sin(\Omega_0 t),$$

konštanty  $C_1, C_2$  určíme zo začiatočných podmienok, ak  $t = 0$ , potom

$$y_1 = y_{01}, \quad (7)$$

$$\dot{y}_1 = \dot{y}_{01}. \quad (8)$$

$$Z (7) \quad \Rightarrow \quad y_{01} = C_1,$$

$$z (8) \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_{01} = \Omega_0 C_2, \quad \text{odkiaľ} \quad C_2 = \frac{\dot{y}_{01}}{\Omega_0},$$

potom

$$y_1 = y_{01} \cos(\Omega_0 t) + \frac{\dot{y}_{01}}{\Omega_0} \sin(\Omega_0 t),$$

$$y_1 = 0,4 \cdot 10^{-2} \cos(6,32t) + \frac{7 \cdot 10^{-2}}{6,32} \sin(6,32t),$$

čo je rovnica pohybu bremena 1.

Amplitúdu kmitania bremena 1 určíme z predpokladu, že riešenie diferenciálnej rovnice je v tvare

$$y_1 = s_a \sin(\Omega_0 t + \varphi_0),$$

$$\dot{y}_1 = s_a \Omega_0 \cos(\Omega_0 t + \varphi_0).$$

Pre začiatočné podmienky v čase  $t = 0$ , platí:

$$y_1 = y_{01}, \quad (9)$$

$$\dot{y}_1 = \dot{y}_{01}. \quad (10)$$

$$Z (9) \quad \Rightarrow \quad y_{01} = s_a \sin(\Omega_0 0 + \varphi_0) = s_a \sin \varphi_0 \quad / ( )^2,$$

$$z (10) \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{y}_{01}}{\Omega_0} = s_a \cos(0 + \varphi_0) = s_a \cos \varphi_0 \quad / ( )^2,$$

potom ak spočítame ľavé a pravé strany, bude

$$y_{01}^2 + \frac{\dot{y}_{01}^2}{\Omega_0^2} = s_a^2,$$

odkiaľ amplitúda

$$s_a = \sqrt{y_{01}^2 + \left( \frac{\dot{y}_{01}}{\Omega_0} \right)^2} = 1,1768 \cdot 10^{-2} \text{ m}.$$

Začiatočnú fázu kmitania určíme z

$$y_{01} = s_a \sin \varphi_0,$$

$$\frac{\dot{y}_{01}}{\Omega_0} = s_a \cos \varphi_0,$$

odkiaľ po predelení prvej rovnice druhou dostávame

$$\frac{y_{01} \Omega_0}{\dot{y}_{01}} = \frac{s_a \sin \varphi_0}{s_a \cos \varphi_0} \quad \Rightarrow \quad \text{tg } \varphi_0 = \frac{\Omega_0 y_{01}}{\dot{y}_{01}} = 0,3614$$

čomu odpovedá približne uhol  $\varphi_0 = 19^\circ 52'$ .

Potom amplitúda výchylky v čase  $t = 0$  bude

$$y_{01} = s_a \sin(\Omega_0 t + \varphi_0) \doteq 0,4 \text{ cm.}$$

### **Príklad 11.18**

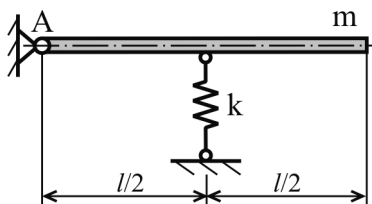
Malé kmity mechanickej sústavy okolo rovnovážnej polohy sú opísané diferenciálnou rovnicou  $\ddot{y} + (4\pi)^2 y = 0$ . V čase  $t = 0$  je  $y_0 = 0,02 \text{ cm}$ ,  $\dot{y}_0 = 2 \text{ ms}^{-1}$ . Určte amplitúdu kmitania.

(0,16 m)

### **Príklad 11.19**

Tuhý nosník o hmotnosti  $m$  je uložený otočne v kĺbe A a uchytený pružinou o tuhosti  $k$ . Vypočítajte vlastnú kruhovú frekvenciu jeho voľného kmitania.

Dané hodnoty:  $m = 3 \text{ kg}$ ,  $k = 400 \text{ Nm}^{-1}$ .



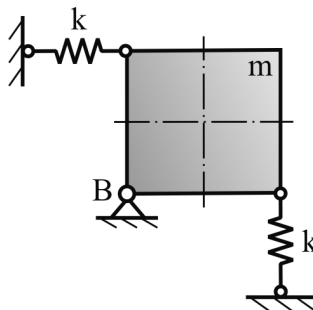
Obr. 11.18

(10  $\text{rads}^{-1}$ )

### **Príklad 11.20**

Tuhá štvorcová homogénna doska o hmotnosti  $m$  je uložená otočne v kĺbe B a uchytená pružinami s rovnakými tuhosťami  $k$ . Určte vlastnú kruhovú frekvenciu voľného kmitania dosky.

Dané hodnoty:  $m = 10 \text{ kg}$ ,  $k = 10^3 \text{ Nm}^{-1}$ .



Obr. 11.19

(2,76 Hz)

### **Príklad 11.21**

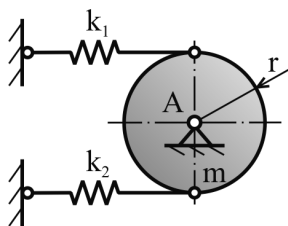
Vypočítajte periódu voľného kmitania sústavy, ktorej kmitanie okolo rovnovážnej polohy je opísané diferenciálnou rovnicou  $56\ddot{x} + 825x = 0$ .

(1,64 s)

### **Príklad 11.22**

Tuhý homogénny kotúč o hmotnosti  $m$  je uložený otočne v kĺbe  $A$  a uchytený pružinami o tuhostiach  $k_1, k_2$ . Určte vlastnú uhlovú frekvenciu voľného kmitania kotúča.

Dané hodnoty:  $m = 2 \text{ kg}$ ,  $k_1 = 900 \text{ Nm}^{-1}$ ,  $k_2 = 700 \text{ Nm}^{-1}$ .



Obr. 11.20

(40  $\text{rads}^{-1}$ )

## **11.7 Príklady riešenia kmitania sústav s 1 ° voľnosti v Matlabe**

### **Príklad 11.23**

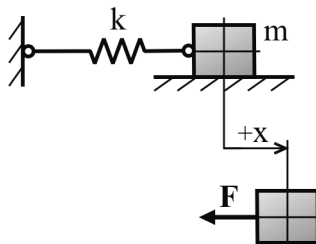
Bremeno o hmotnosti  $m$  je uchytené k tuhej stene pomocou pružiny tuhosti  $k$ . Zistite, ako sa mení vlastná frekvencia kmitania bremena pri zmene:

- jeho hmotnosti  $m$ ,
- tuhosti pružiny  $k$ ,

ak začiatočné podmienky zostávajú nezmenené. Pasívne odpory zanedbajte.

Dané hodnoty:  $x(0) = 0,004 \text{ m}$ ,  $v(0) = 0 \text{ ms}^{-1}$

- $m = (0,5; 1; 2) \text{ kg}$ ,  $k = 100 \text{ Nm}^{-1}$
- $m = 0,5 \text{ kg}$ ,  $k = (100; 200; 500) \text{ Nm}^{-1}$



Obr. 11.21

### 1. Uvoľnenie. Analýza úlohy

Vychýlime bremeno z rovnovážnej polohy jeho posunutím o začiatočnú výchylku  $x_0$ . Bremeno, ktoré môžeme považovať za hmotný bod, začne následne voľne kmitať s frekvenciou odpovedajúcou vlastnej frekvencii sústavy  $f_0$ . Na bremeno bude pritom pôsobiť sila  $F$  pružiny  $k$ , ktorej veľkosť je úmerná výchylke  $x(t)$ , čiže platí  $F = kx$ . Sústava má 1° voľnosti pohybu.

### 2. Dynamická pohybová rovnica (DPR) sústavy je daná vzťahom

$$m\ddot{x} + kx = 0,$$

odkiaľ po úprave dostávame

$$\ddot{x} + \Omega_0^2 x = 0,$$

kde  $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  je vlastná kruhová frekvencia.

Ak predpokladáme riešenie DPR v tvare

$$x(t) = C \sin(\Omega_0 t + \varphi),$$

potom amplitúda výchylky kmitania je

$$C = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\Omega_0}\right)^2},$$

a fázové posunutie kmitavého pohybu na začiatku pohybu ( $t=0$ )

$$\varphi = \arctg \frac{x_0 \Omega_0}{v_0}.$$

Vlastnú frekvenciu kmitania vypočítame zo vzťahu  $f_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi}$ .

### Riešenie príkladu v Matlabe:

a) posúdenie zmeny vlastnej frekvencie kmitania sústavy pri zmene hmotnosti bremena

```
clc           % vymaze obsah okna "Command Window"
clear all    % vymaze z pamate vsetky premenne
close all    % zatvori vsetky otvorene okna

% fyzicke parametre sustavy
k = 100;      % tuhost pruziny [N/m]
m = [0.5 1 2] ; % hmotnost objektu [kg]

for i=1:1:3

    OMEGA0 = sqrt(k/m(i)); % vlastna kruhova frekvencia [rad/s]
    T = 2*pi/OMEGA0;      % perioda - doba kmitu [s]
    f0 = 1/T;             % vlastna frekvencia [Hz]
```

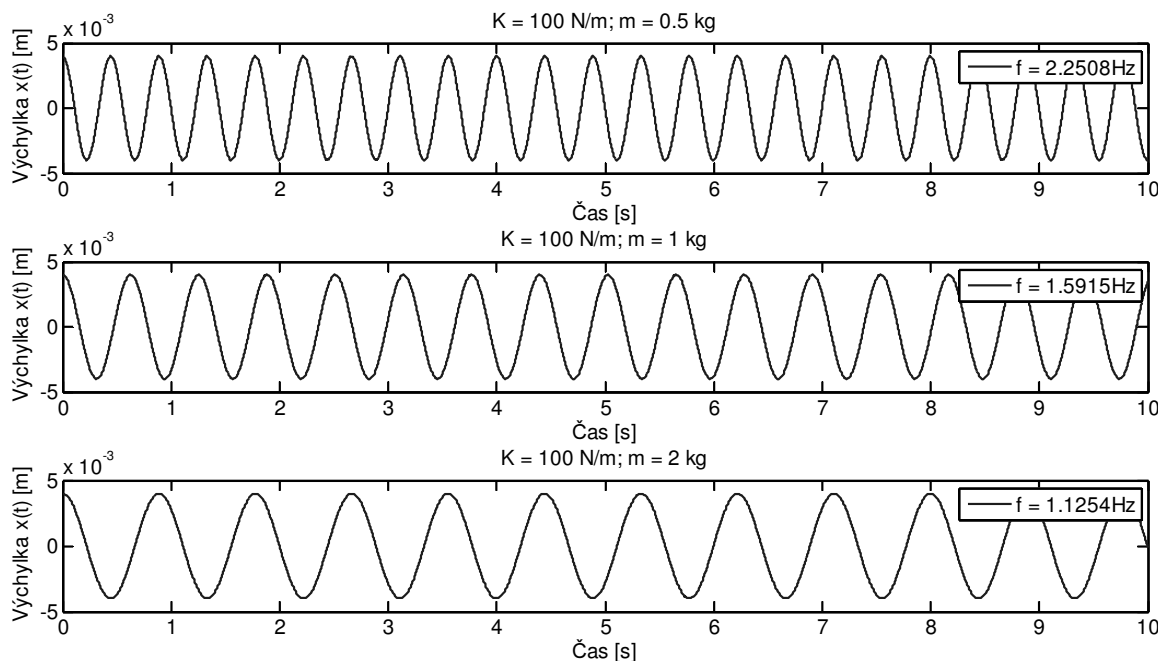
```
% zaciatočne podmienky v case t=0
x0 = 0.004;           % zaciatočná výchylka x(0) [m]
v0 = 0;               % zaciatočná rýchlosť v(0) [m/s]

% hranice časového intervalu riešenia
t0 = 0;               % zaciatočný čas [s]
t1 = 10;              % konečný čas [s]
dt = 0.001;           % inkrement času (časový prírastok)
t = t0:dt:t1;         % vektor hodnôt časového intervalu

% výpočet časovej odozvy sústavy x(t)
C = sqrt(x0^2 + (v0/OMEGA0)^2); % amplituda výchylky [m]
fi = atan(x0*OMEGA0/v0);         % fazové posunutie [rad]
x = C*sin(OMEGA0*t+fi);          % výchylka kmitania x(t) [m]

% vykreslenie časovej odozvy x(t)
subplot(3,1,i)
plot(t, x)
title(['K = 100 N/m; m = ', num2str(m(i)), ' kg']);
legend(['f = ', num2str(f0), ' Hz'])
xlabel('Čas [s]')
ylabel('Výchylka x(t) [m]')
axis([0 10 -0.005 0.005])
```

end



**Obr. 11.22** Časové odozvy voľného netlmeného kmitania sústavy pri zmene hmotnosti bremena

(Vlastná frekvencia kmitania sústavy sa s narastajúcou hmotnosťou bremena znižuje.)

b) posúdenie zmeny vlastnej frekvencie kmitania sústavy pri zmene tuhosti pružiny

```
clc           % vymaze obsah okna "Command Window"
clear all    % vymaze z pamäte všetky premenne
close all    % zatvori všetky otvorené okna
```

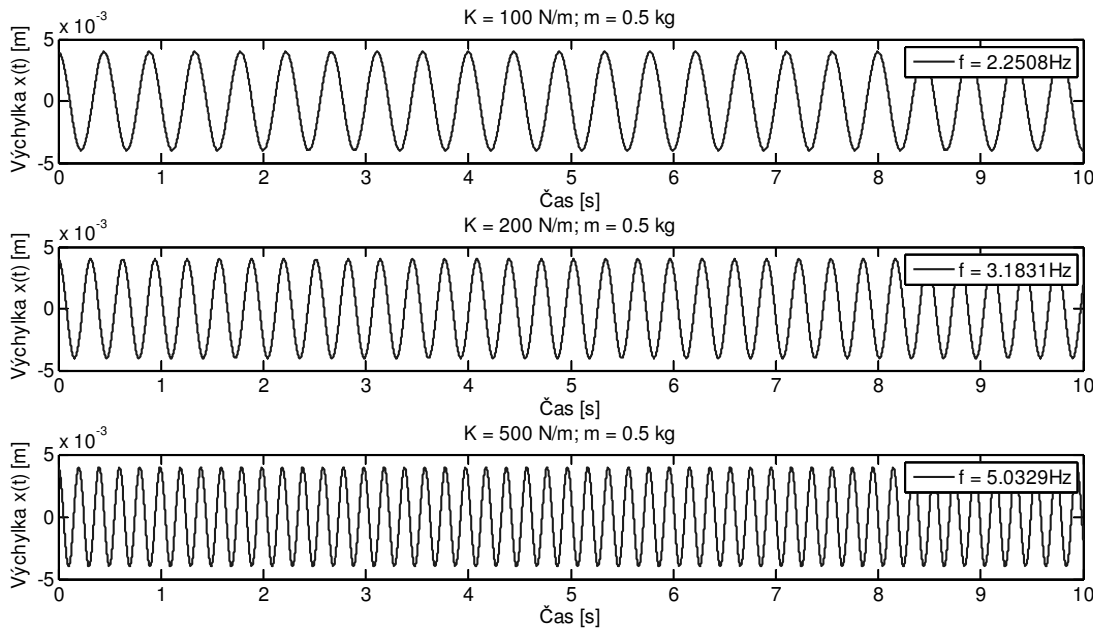
```
% fyzicke parametre sustavy
k = [100 200 500]; % tuhost pruziny [N/m]
m = 0.5 ;          % hmotnost objektu [kg]
for i=1:1:3
    OMEGA0 = sqrt(k(i)/m); % vlastna kruhova frekvencia [rad/s]
    T = 2*pi/OMEGA0;       % perioda - doba kmitu [s]
    f0 = 1/T;              % vlastna frekvencia [Hz]

    % zaciatočne podmienky v case t=0
    x0 = 0.004;           % zaciatočna vychylka x(0) [m]
    v0 = 0;               % zaciatočna rychlost v(0) [m/s]

    % hranice casoveho intervalu riesenia
    t0 = 0;               % zaciatočný čas [s]
    t1 = 10;              % konečný čas [s]
    dt = 0.001;          % inkrement času (casovy prirastok)
    t = t0:dt:t1;         % vektor hodnot casoveho intervalu

    % vypocet casovej odozvy sustavy x(t)
    C = sqrt(x0^2 + (v0/OMEGA0)^2); % amplituda vychylky [m]
    fi = atan(x0*OMEGA0/v0);         % fazove posunutie [rad]
    x = C*sin(OMEGA0*t+fi);          % vychylka kmitania x(t) [m]

    % vykreslenie casovej odozvy x(t)
    subplot(3,1,i)
    plot(t, x)
    title(['K = ',num2str(k(i)),'; m = 0.5 ']);
    legend(['f = ',num2str(f0), 'Hz'])
    xlabel('Čas')
    ylabel('Výchylka x(t)')
    axis([0 10 -0.005 0.005])
end
```



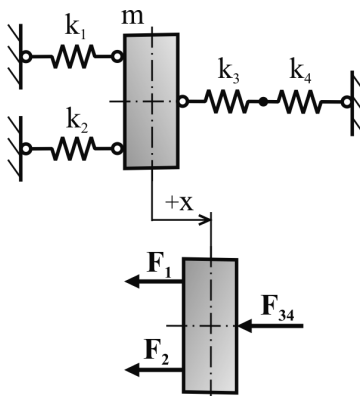
Obr. 11.23 Časové odozvy voľného netlmeného kmitania sústavy pri zmene tuhosti pružiny

(Vlastná frekvencia kmitania sústavy sa s narastajúcou tuhosťou pružiny zvyšuje.)

### **Príklad 11.24**

Bremeno o hmotnosti  $m$  je uchytené k tuhej stene pomocou pružín  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  a  $k_4$ . Pre dané začiatočné podmienky určte časovú odozvu sústavy v podobe výchylky, rýchlosti a zrýchlenia kmitania bremena. Sústava môže vykonávať len posuvný pohyb vo vodorovnom smere.

Dané hodnoty:  $m = 2 \text{ kg}$ ,  $k_1 = 150 \text{ Nm}^{-1}$ ,  $k_2 = 220 \text{ Nm}^{-1}$ ,  $k_3 = 300 \text{ Nm}^{-1}$ ,  $k_4 = 100 \text{ Nm}^{-1}$ ,  $x(0) = 0,02 \text{ m}$ ,  $v(0) = 0,35 \text{ ms}^{-1}$



**Obr. 11.24**

#### 1. Uvoľnenie. Analýza úlohy

Vychýlime bremeno z rovnovážnej polohy jeho posunutím o začiatočnú výchylku  $x_0$ , pričom mu udelíme začiatočnú rýchlosť  $v_0$ . Bremeno, ktoré môžeme považovať za hmotný bod, začne následne voľne kmitať s frekvenciou odpovedajúcou vlastnej frekvencii sústavy  $f_0$ . Na bremeno budú pritom pôsobiť sily v pružinách  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  a  $k_4$ . Sústava má 1° voľnosti pohybu.

#### 2. Dynamická pohybová rovnica (DPR) sústavy je daná vzťahom

$$m\ddot{x} + k_v x = 0,$$

kde  $k_v$  je výsledná tuhosť sústavy, ktorú určíme z podmienky rovnováhy

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0: \quad & -F_1 - F_2 - F_{34} = 0, \\ & -k_1 x - k_2 x - \frac{k_3 k_4}{k_3 + k_4} x = 0, \end{aligned}$$

odkiaľ po úprave dostávame

$$k_v = k_1 + k_2 + \frac{k_3 k_4}{k_3 + k_4}.$$



Po dosadení a úprave dostávame DPR sústavy v tvare

$$\ddot{x} + \Omega_0^2 x = 0,$$

kde  $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k_v}{m}}$  je vlastná kruhová frekvencia.

Dynamická pohybová rovnica je vlastne homogénna diferenciálna rovnica 2. rádu. Na jej riešenie v Matlabe môžeme použiť funkciu `ode45`, ktorá pri výpočte využíva iteračnú metódu Runge-Kutta. Riešením rovnice získavame časovú závislosť výchylky  $x(t)$  a rýchlosti  $v(t)$  kmitania bremena.

Pre potreby riešenia úlohy v Matlabe upravíme DPR do tvaru

$$\ddot{x} = -\Omega_0^2 x.$$

### Riešenie príkladu v Matlabe:

```
clc          % vymaze obsah okna "Command Window"
clear all    % vymaze z pamate vsetky premenne
close all    % zatvori vsetky otvorene okna

% fyzicke parametre sustavy
k1 = 150;      % tuhost pruziny k1 [N/m]
k2 = 220;      % tuhost pruziny k2 [N/m]
k3 = 300;      % tuhost pruziny k1 [N/m]
k4 = 100;      % tuhost pruziny k1 [N/m]
m = 2;         % hmotnost objektu [kg]

kv = k3*k4/(k3+k4) + k1 + k2; % vysledna tuhost pruzin
OMEGA0 = sqrt(kv/m);          % vlastna kruhova frekvencia [rad/s]
T = 2*pi/OMEGA0;              % perioda - doba kmitu [s]
f0 = 1/T;                     % vlastna frekvencia [Hz]

% zaciatočne podmienky v case t=0
x0 = 0.02;                    % zaciatočna vychylka x(0) [m]
v0 = 0.35;                    % zaciatočna rychlost v(0) [m/s]

% hranice casoveho intervalu riesenia
t0 = 0;                       % zaciatočný cas [s]
t1 = 10;                       % konečný cas [s]

% dynamicka pohybova rovnica
DPR = @(t,X) [X(2); -OMEGA0^2*X(1)];

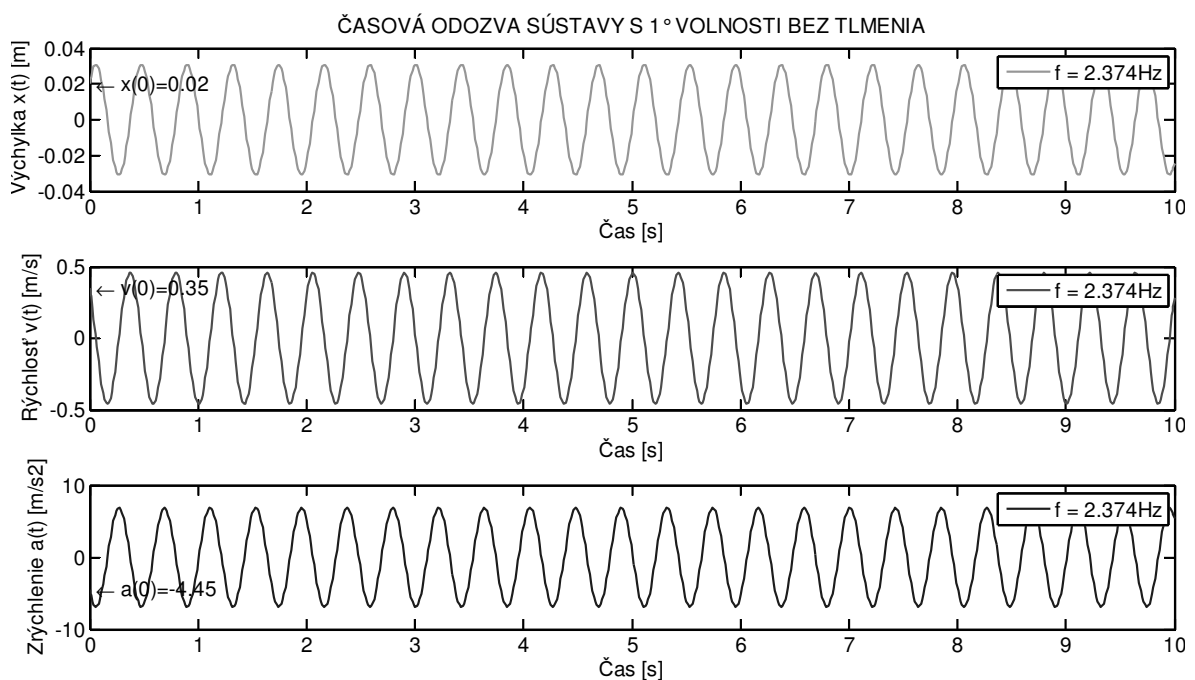
% riesenie dynamickej pohybovej rovnice (diferencialnej rovnice)
[t,X] = ode45(DPR, [t0 t1], [x0 v0]);
% riesenie X(1) = x(t) - vychylka
% riesenie X(2) = v(t) - rychlost

% vypocet zrychlenia a(t)
a = -OMEGA0^2*X(:,1);
```

```
% vykreslenie casovej odozvy x(t), v(t), a(t)
figure
subplot(3,1,1)
plot(t, X(:,1), 'color', 'green')
title('ČASOVÁ ODOZVA SÚSTAVY S 1° VOLNOSTI BEZ TLMENIA');
legend(['f = ', num2str(f0), 'Hz'])
xlabel('Čas [s]')
ylabel('Výchylka x(t) [m]')
text(0, x0, [' \leftarrow x(0)=', num2str(x0)], 'FontSize', 8)

subplot(3,1,2)
plot(t, X(:,2), 'color', 'red')
legend(['f = ', num2str(f0), 'Hz'])
xlabel('Čas [s]')
ylabel('Rýchlosť v(t) [m/s]')
text(0, v0, [' \leftarrow v(0)=', num2str(v0)], 'FontSize', 8)

subplot(3,1,3)
plot(t, a, 'color', 'blue')
legend(['f = ', num2str(f0), 'Hz'])
xlabel('Čas [s]')
ylabel('Zrýchlenie a(t) [m/s^2]')
text(0, a(1), [' \leftarrow a(0)=', num2str(a(1))], 'FontSize', 8)
```

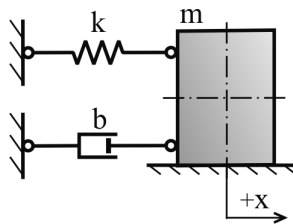


Obr. 11.25 Výchylka, rýchlosť a zrýchlenie kmitania bremena

### **Príklad 11.25**

Bremeno o hmotnosti  $m$  je uchytené k tuhej stene pomocou pružiny  $k$  a tlmiča  $b$ . Pre tri rôzne hodnoty súčiniteľa viskózneho odporu určte časové odozvy kmitania bremena a na základe hodnoty pomerného útlmu  $b_p$  posúďte tlmiace vlastnosti sústavy. Pasívne odpory zanedbajte.

Dané hodnoty:  $m = 10 \text{ kg}$ ,  $k = 160 \text{ Nm}^{-1}$ ,  $b = (20; 80; 240) \text{ kgs}^{-1}$ ,  $x(0) = 0,05 \text{ m}$ ,  
 $v(0) = 0 \text{ ms}^{-1}$



Obr. 11.26

### 1. Uvoľnenie. Analýza úlohy

Vychýlime bremeno z rovnovážnej polohy jeho posunutím o začiatočnú výchylku  $x_0$ . Bremeno, ktoré môžeme považovať za hmotný bod, začne následne voľne kmitať s frekvenciou  $f_d$ , pričom vplyvom účinku tlmiacej sily dôjde k postupnému znižovaniu amplitúd výchyliek.

2. Dynamická pohybová rovnica (DPR) sústavy je daná vzťahom

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0,$$

ktorý môžeme upraviť do tvaru

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0,$$

kde konštanta útlmu  $\delta = \frac{2b}{m}$  a vlastná kruhová frekvencia voľného netlmeného kmitania

$\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . Pre vlastnú kruhovú frekvenciu voľného tlmeného kmitania platí

$$\Omega_d = \sqrt{\Omega_0^2 - \delta^2}.$$

Potom frekvenciu kmitania tlmenej sústavy vypočítame zo vzťahu  $f_d = \frac{\Omega_d}{2\pi}$ .

Pomerný útlm je daný vzťahom

$$b_p = \frac{\delta}{\Omega_0}.$$

Na základe hodnoty pomerného útlmu rozlíšujeme nasledovné prípady tlmenia v sústave

$b_p > 1$  – nadkritické tlmenie,

$b_p = 1$  – kritické tlmenie,

$b_p < 1$  – podkritické tlmenie.

Pre potreby riešenia úlohy v Matlabe upravíme DPR do tvaru

$$\ddot{x} = -2\delta\dot{x} - \Omega_0^2 x.$$

### Riešenie príkladu v Matlabe:

```
clc          % vymaze obsah okna "Command Window"
clear all    % vymaze z pamate vsetky premenne
close all    % zatvori vsetky otvorene okna

% fyzicke parametre sustavy
k = 160;      % tuhost pruziny [N/m]
b = [20 80 240]; % sucinitel viskoz. odporu [kg/s]
m = 10;      % hmotnost objektu [kg]

for i=1:1:3

    % vlastna kruh. frekvencia netlmenej sustavy [rad/s]
    OMEGA0 = sqrt(k/m);
    % konstanta utlmu /2 [1/s]
    DELTA = b(i)/(2*m);
    % kruh. frekvencia tlmenej sustavy [rad/s]
    OMEGAd = sqrt(abs(OMEGA0^2-DELTA^2));

    bp(i) = DELTA/OMEGA0; % pomerny utlm
    Td = 2*pi/OMEGAd;    % perioda - doba kmitu [s]
    fd = 1/Td;           % frekvencia kmitania [Hz]

    % zaciatočne podmienky v case t=0
    x0 = 0.05;           % zaciatočna vychylka x(0) [m]
    v0 = 0;              % zaciatočna rychlost v(0) [m/s]

    % hranice casoveho intervalu riesenia
    t0 = 0;              % zaciatočný cas [s]
    t1 = 8;              % konecny cas [s]

    % dynamicka pohybova rovnica
    DPR = @(t,X) [X(2); -2*DELTA*X(2)-OMEGA0^2*X(1)];
    % riesenie dynamickej pohybovej rovnice (diferencialnej rovnice)
    [t,X] = ode45(DPR, [t0 t1], [x0 v0]);
    % riesenie X(1) = x(t) - vychylka
    % riesenie X(2) = v(t) - rychlost

    % vypocet zrychlenia a(t)
    a = -2*DELTA*X(:,2)-OMEGA0^2*X(:,1);

    % zapis vysledkov pre b = 20 do matice odozva1
    if (i==1) odozva1 = [t X(:,1) X(:,2) a]; end
    % zapis vysledkov pre b = 80 do matice odozva2
    if (i==2) odozva2 = [t X(:,1) X(:,2) a]; end
    % zapis vysledkov pre b = 240 do matice odozva3
    if (i==3) odozva3 = [t X(:,1) X(:,2) a]; end

end

% vykreslenie casovej odozvy x(t), v(t), a(t)
figure
hold on
title(['ČASOVÁ ODOZVA TLMENEJ SÚSTAVY (fd = ', num2str(fd), 'Hz)']);
plot(odozva1(:,1), odozva1(:,2), '-o', 'color', 'green', 'MarkerSize',4)
plot(odozva2(:,1), odozva2(:,2), '-x', 'color', 'green', 'MarkerSize',5)
```

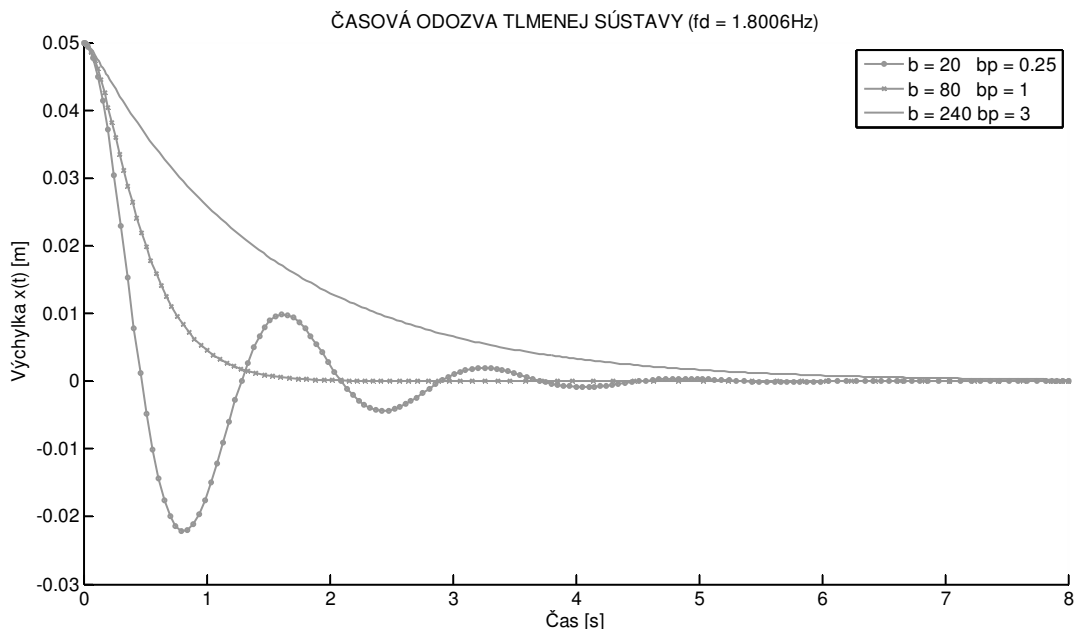
```

plot(odozva3(:,1), odozva3(:,2), '-', 'color', 'green')
legend(['b = ', num2str(b(1)), ' bp = ', num2str(bp(1))], ...
       ['b = ', num2str(b(2)), ' bp = ', num2str(bp(2))], ...
       ['b = ', num2str(b(3)), ' bp = ', num2str(bp(3))])
xlabel('Čas [s]')
ylabel('Výchylka x(t) [m]')

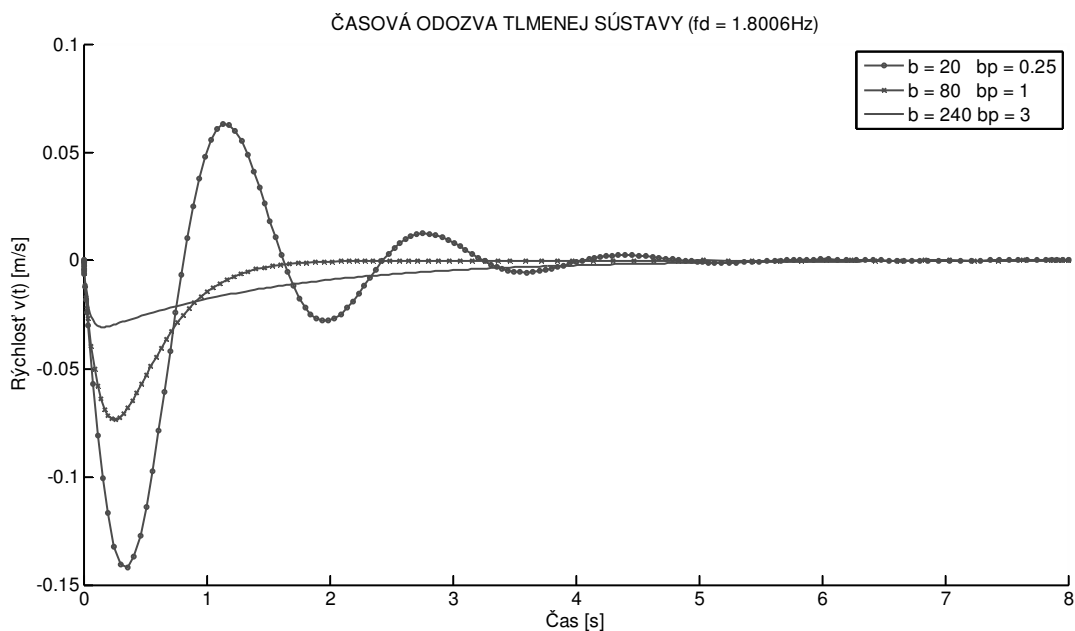
figure
hold on
title(['ČASOVÁ ODOZVA TLMENEJ SÚSTAVY (fd = ', num2str(fd), 'Hz)']);
plot(odozva1(:,1), odozva1(:,3), '-o', 'color', 'red', 'MarkerSize',4)
plot(odozva2(:,1), odozva2(:,3), '-x', 'color', 'red', 'MarkerSize',5)
plot(odozva3(:,1), odozva3(:,3), '-', 'color', 'red')
legend(['b = ', num2str(b(1)), ' bp = ', num2str(bp(1))], ...
       ['b = ', num2str(b(2)), ' bp = ', num2str(bp(2))], ...
       ['b = ', num2str(b(3)), ' bp = ', num2str(bp(3))])
xlabel('Čas [s]')
ylabel('Rýchlosť v(t) [m/s]')

figure
hold on
title(['ČASOVÁ ODOZVA TLMENEJ SÚSTAVY (fd = ', num2str(fd), 'Hz)']);
plot(odozva1(:,1), odozva1(:,4), '-o', 'color', 'blue', 'MarkerSize',4)
plot(odozva2(:,1), odozva2(:,4), '-x', 'color', 'blue', 'MarkerSize',5)
plot(odozva3(:,1), odozva3(:,4), '-', 'color', 'blue')
legend(['b = ', num2str(b(1)), ' bp = ', num2str(bp(1))], ...
       ['b = ', num2str(b(2)), ' bp = ', num2str(bp(2))], ...
       ['b = ', num2str(b(3)), ' bp = ', num2str(bp(3))])
xlabel('Čas [s]')
ylabel('Zrýchlenie a(t) [m/s^2]')

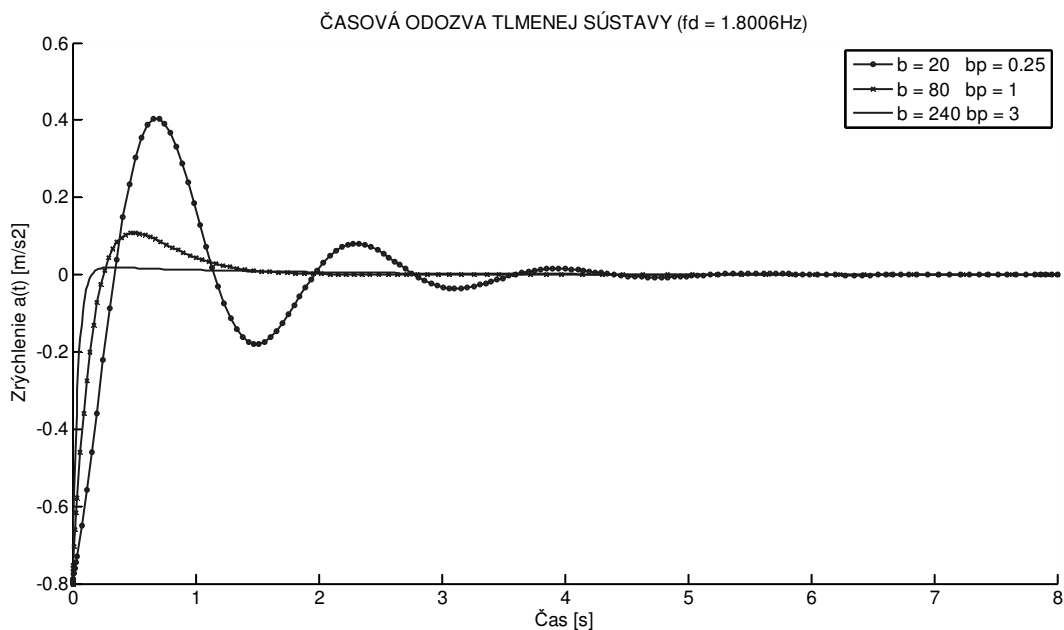
```



**Obr. 11.27 Časová odozva výchylky kmitania bremena pri rôznych hodnotách súčiniteľa viskózneho odporu**



**Obr. 11.28 Časová odozva rýchlosti kmitania bremena pri rôznych hodnotách súčiniteľa viskózneho odporu**



**Obr. 11.29 Časová odozva zrýchlenia kmitania bremena pri rôznych hodnotách súčiniteľa viskózneho odporu**

V prípade, keď je súčiniteľ viskózneho odporu  $b = 20 \text{ kgs}^{-1}$ , je hodnota pomerného útlmu  $b_p = 0.25$ , z čoho vyplýva, že tlmenie v sústave je podkritické a bremeno vykonáva kmitavý pohyb. V prípade, keď je súčiniteľ viskózneho odporu  $b = 80 \text{ kgs}^{-1}$ , je hodnota pomerného útlmu  $b_p = 1$ , z čoho vyplýva, že tlmenie v sústave je kritické a bremeno vykonáva hraničný aperiodický pohyb. V prípade, keď je súčiniteľ viskózneho odporu

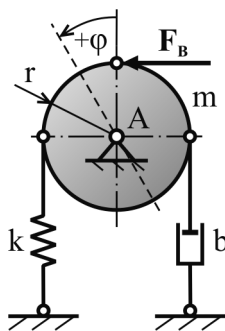
$b = 240 \text{ kgs}^{-1}$ , je hodnota pomerného útlmu  $b_p = 3$ , z čoho vyplýva, že tlmenie v sústave je nadkritické, čo znamená, že kmitavý pohyb nenastáva.

### **Príklad 11.26**

Homogénny kotúč polomeru  $r$  a hmotnosti  $m$  je uložený v ložisku A. K tuhej stene je prichytený pružinou  $k$  a tlmičom  $b$ . Určte časovú odozvu výchylky, rýchlosti a zrýchlenia kmitania kotúča, ak naň pôsobí

- konštantná budiaca sila  $F_B = F_0 = \text{konšt.}$ ,
- harmonická sila  $F_B$  s konštantou amplitúdou  $F_0$  a frekvenciou  $f_b$ .

Dané hodnoty:  $m = 20 \text{ kg}$ ,  $r = 0,5 \text{ m}$ ,  $k = 500 \text{ Nm}^{-1}$ ,  $b = 30 \text{ kgs}^{-1}$ ,  $F_0 = 10 \text{ N}$ ,  $f_b = 5 \text{ Hz}$ ,  $\varphi(0) = 0 \text{ rad}$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0 \text{ rads}^{-1}$



Obr. 11.30

#### 1. Uvoľnenie. Analýza úlohy

a) Ak bude na kotúč v stave pokoja pôsobiť konštantná budiaca sila, kotúč začne vykonávať tlmený kmitavý pohyb s vlastnou frekvenciou  $f_d$  okolo polohy, na ktorej sa vplyvom prítomnosti tlmenia v sústave ustáli.

b) V prípade harmonickej budiacej sily s konštantnou amplitúdou, bude kotúč vykonávať kmitavý pohyb, pre ktorý je charakteristický začiatkový prechodový stav, počas ktorého dochádza k postupnému zániku voľného tlmeného kmitania; a následný ustálený stav, počas ktorého kotúč vynútené kmitá s konštantnou amplitúdou a frekvenciou odpovedajúcou frekvencii budiacej sily.

#### 2. Dynamickú pohybovú rovnicu (DPR) kotúča odvodíme z podmienky

$$I_A \alpha = \sum (M_i)_A,$$

$$I_A \ddot{\varphi} = -F_1 r - F_2 r + F_B r,$$

kde  $F_1$  je sila v tlmiči,

$F_2$  sila v pružine,

$I_A$  moment zotrvačnosti kotúča k osi prechádzajúcej bodom A, ktorý určíme zo

$$\text{vzťahu } I_A = \frac{mr^2}{2}.$$

Po dosadení dostávame

$$\frac{mr^2}{2} \ddot{\varphi} = -br^2 \dot{\varphi} - kr^2 \varphi + F_B r,$$

odkiaľ úpravou získavame DPR kotúča v tvare

$$\ddot{\varphi} + \frac{2b}{m} \dot{\varphi} + \frac{2k}{m} \varphi = \frac{2F_B}{mr},$$

kde budiaca sila  $F_B$  bude

a)  $F_B = F_0$ ,

b)  $F_B = F_0 \sin(2\pi \cdot f_b t)$ .

Pre potreby riešenia úlohy v Matlabe upravíme DPR do tvaru

$$\ddot{\varphi} = -2\delta \dot{\varphi} - \Omega_0^2 \varphi + \frac{2F_B}{mr},$$

kde konštanta útlmu  $\delta = \frac{b}{m}$  a vlastná kruhová frekvencia voľného netlmeného kmitania

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

### Riešenie príkladu v Matlabe:

a) budenie kotúča konštantnou budiacou silou

```
clc                % vymaze obsah okna "Command Window"
clear all          % vymaze z pamate vsetky premenne
close all          % zatvori vsetky otvorene okna

% fyzicke parametre sustavy
k = 500;           % tuhost pruziny k [N/m]
b = 30;            % sucinitel viskoz. odporu [kg/s]
m = 20;            % hmotnost kotuca [kg]
r = 0.5;           % polomer kotuca [m]
F0 = 10;           % amplituda budiacej sily [N]

OMEGA0 = sqrt(2*k/m); % vlastna kruhova frekvencia [rad/s]
DELTA = b/m;         % konstanta utlmu [1/s]
OMEGAd = sqrt(abs(OMEGA0^2-DELTA^2)); % vl. kruh. frekvencia tlmenej sustavy [rad/s]
bp = DELTA/OMEGA0;    % pomerny utlm
Td = 2*pi/OMEGAd;     % perioda - doba kmitu [s]
fd = 1/Td;            % frekvencia kmitania [Hz]
```



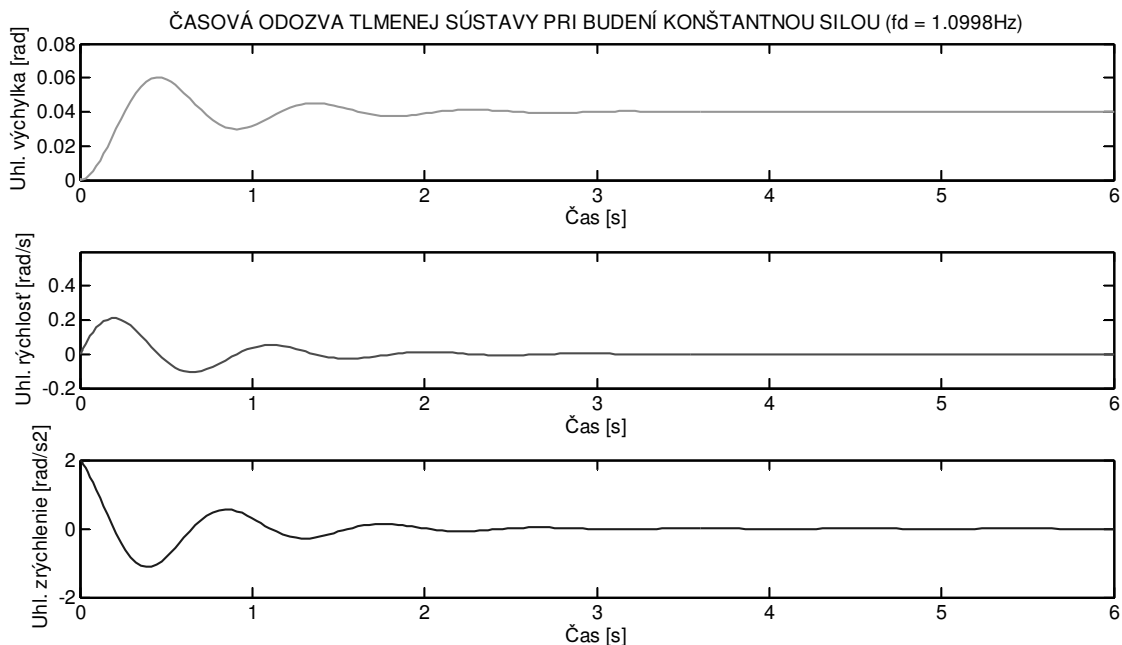
```
% zaciatočne podmienky v case t=0
fi0 = 0; % zaciatočne vychylenie fi(0) [rad]

% hranice casoveho intervalu riesenia
t0 = 0; % zaciatočný čas [s]
t1 = 6; % konečný čas [s]

% dynamická pohybová rovnica
DPR = @(t,FI) [FI(2); -2*DELTA*FI(2)-OMEGA0^2*FI(1)+2*F0/(m*r)];
% riesenie dynamickej pohybovej rovnice (diferencialnej rovnice)
[t,FI] = ode45(DPR, [t0 t1], [fi0 0]);
% riesenie FI(1) =  $\varphi(t)$  - uhl. pootocenie
% riesenie FI(2) =  $\omega(t)$  - uhl. rychlost

% vypocet uhl. zrychlenia  $\alpha(t)$  z DPR
alfa = -2*DELTA*FI(:,2)-OMEGA0^2*FI(:,1)+2*Fb/(m*r);

% vykreslenie casovej odozvy  $\varphi(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $\alpha(t)$ 
figure
subplot(3,1,1)
plot(t, FI(:,1), 'color', 'green')
title(['ČASOVÁ ODOZVA TLMEŇEJ SÚSTAVY PRI BUDENÍ KONŠTANTNOU SILOU (fd = ', num2str(fd), 'Hz)']);
xlabel('Čas [s]')
ylabel('Uhl. výchylka fi(t) [rad]')
subplot(3,1,2)
plot(t, FI(:,2), 'color', 'red')
xlabel('Čas [s]')
ylabel('Uhl. rýchlosť omega(t) [rad/s]')
subplot(3,1,3)
plot(t, alfa, 'color', 'blue')
xlabel('Čas [s]')
ylabel('Uhl. zrýchlenie alfa(t) [rad/s^2]')
```



Obr. 11.31 Časové odozvy kmitania kotúča pri budení konštantnou silou

b) budenie kotúča harmonickou budiacou silou s konštantnou amplitúdou

```
clc                % vymaze obsah okna "Command Window"
clear all          % vymaze z pamate vsetky premenne
close all          % zatvori vsetky otvorene okna

% fyzicke parametre sustavy
k = 500;           % tuhost pruziny k [N/m]
b = 30;           % sucinitel viskoz. odporu [kg/s]
m = 20;           % hmotnost kotuca [kg]
r = 0.5;          % polomer kotuca [m]
F0 = 10;          % amplituda budiacej sily [N]
fb = 5;           % frekvencia budiacej sily [Hz]

OMEGA0 = sqrt(2*k/m); % vlastna kruhova frekvencia [rad/s]
DELTA = b/m;         % konstanta utlmu [1/s]
OMEGAd = sqrt(abs(OMEGA0^2-DELTA^2)); % vl. kruh. frekvencia tlmenej sustavy [rad/s]

bp = DELTA/OMEGA0;    % pomerny utlm
Td = 2*pi/OMEGAd;    % perioda - doba kmitu [s]
fd = 1/Td;           % frekvencia kmitania [Hz]

% zaciatočne podmienky v case t=0
fi0 = 0;             % zaciatočne vychylenie fi(0) [rad]

% hranice casoveho intervalu riesenia
t0 = 0;              % pociatočný cas [s]
t1 = 10;             % konečný cas [s]

% dynamicka pohybova rovnica
DPR = @(t,FI) [FI(2); -2*DELTA*FI(2)-OMEGA0^2*FI(1)+...
    2*F0*sin(2*pi*fb*t)/(m*r)];

% riesenie dynamickej pohybovej rovnice (diferencialnej rovnice)
[t,FI] = ode45(DPR, [t0 t1], [fi0 0]);
% riesenie FI(1) =  $\varphi(t)$  - uhl. pootocenie
% riesenie FI(2) =  $\omega(t)$  - uhl. rychlost

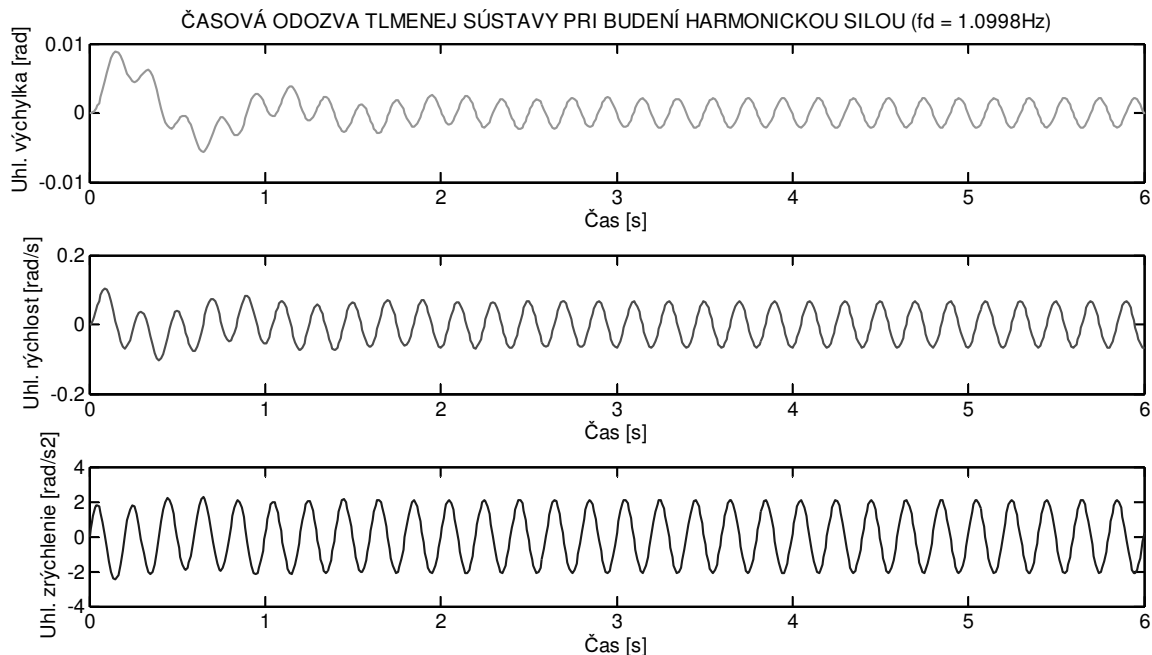
% vypočet uhl. zrychlenia  $\alpha(t)$  z DPR
alfa = -2*DELTA*FI(:,2)-OMEGA0^2*FI(:,1)+2*F0*sin(2*pi*fb*t)/(m*r);

% vykreslenie casovej odozvy  $\varphi(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $\alpha(t)$ 
figure
subplot(3,1,1)
plot(t, FI(:,1), 'color', 'green')
title(['ČASOVÁ ODOZVA TLMENEJ SÚSTAVY PRI BUDENÍ HARMONICKOU SILOU (fd = ', num2str(fd), 'Hz)']);
xlabel('Čas [s]')
ylabel('Uhl. výchylka [rad]')

subplot(3,1,2)
plot(t, FI(:,2), 'color', 'red')
xlabel('Čas [s]')
ylabel('Uhl. rýchlosť [rad/s]')

subplot(3,1,3)
```

```
plot(t, alfa, 'color', 'blue')
xlabel('Čas [s]')
ylabel('Uhl. zrýchlenie [rad/s2]')
```

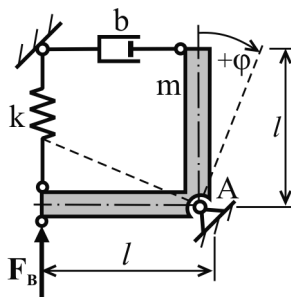


Obr. 11.32 Časové odozvy kmitania kotúča pri budení harmonickou silou

### Príklad 11.27

Zalomený nosník hmotnosti  $m$  je otočne uložený v kĺbe A, pričom naň pôsobí harmonická budiaca sila  $F_B$  s konštantou amplitúdou  $F_0$  a frekvenciou  $f_b$ , ktorá je rovná vlastnej frekvencii voľného netlmeného kmitania nosníka, teda  $f_b = f_0$ . K tuhej stene je nosník prichytený pružinou  $k$  a tlmičom  $b$ . Určte, ako sa zmení časová odozva výchylky, rýchlosti a zrýchlenia kmitania nosníka, ak v určitom okamihu sústava stratí svoje tlmiace vlastnosti.

Dané hodnoty:  $m = 10\text{ kg}$ ,  $l = 0,6\text{ m}$ ,  $k = 500\text{ Nm}^{-1}$ ,  $b = (10; 0)\text{ kgs}^{-1}$ ,  $F_0 = 5\text{ N}$ ,  
 $f_b = f_0$ ,  $\varphi(0) = 0\text{ rad}$ ,  $\dot{\varphi}(0) = 0\text{ rads}^{-1}$



Obr. 11.33

### 1. Uvoľnenie. Analýza úlohy

V prípade budenia sústavy harmonickou silou, ktorej frekvencia je rovná vlastnej frekvencii voľného netlmeného kmitania, nastáva stav rezonancie, pri ktorom dosahujú výchylky kmitania medzné hodnoty.

### 2. Dynamickú pohybovú rovnicu (DPR) nosníka odvodíme z podmienky

$$I_A \alpha = \sum (M_i)_A,$$

$$I_A \ddot{\varphi} = -F_1 l - F_2 l + F_B l,$$

kde  $F_1$  je sila v tlmiči,

$F_2$  sila v pružine,

$I_A$  moment zotrvačnosti nosníka k osi prechádzajúcej bodom A, ktorý určíme zo vzťahu  $I_A = \frac{ml^2}{3}$ .

Po dosadení dostávame

$$\frac{ml^2}{3} \ddot{\varphi} = -bl^2 \dot{\varphi} - kl^2 \varphi + F_B l,$$

odkiaľ úpravou získavame DPR nosníka v tvare

$$\ddot{\varphi} + \frac{3b}{m} \dot{\varphi} + \frac{3k}{m} \varphi = \frac{3F_B}{ml},$$

kde budiaca sila

$$F_B = F_0 \sin(2\pi \cdot f_0 t).$$

Vlastnú frekvenciu  $f_0$  voľného netlmeného kmitania nosníka vypočítame zo vzťahu

$$f_0 = \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3k}{m}} = 1,9492 \text{ Hz}.$$

Pre potreby riešenia úlohy v Matlabe upravíme DPR do tvaru

$$\ddot{\varphi} = -2\delta \dot{\varphi} - \Omega_0^2 \varphi + \frac{3F_0 \sin(2\pi \cdot f_0 t)}{ml},$$

kde konštanta útlmu  $\delta = \frac{3b}{2m}$  a vlastná kruhová frekvencia voľného netlmeného kmitania

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{3k}{m}}.$$

### Riešenie príkladu v Matlabe:

```
clc          % vymaze obsah okna "Command Window"
clear all    % vymaze z pamate vsetky premenne
close all    % zatvori vsetky otvorene okna

% fyzicke parametre sustavy
k = 500;      % tuhost pruziny k [N/m]
b = [10 0];   % sucinitel viskoz. odporu [kg/s]
m = 10;       % hmotnost nosnika [kg]
l = 0.6;      % dlzka ramena nosnika [m]
F0 = 5;       % amplituda budiacej sily [N]
fb = 1.9492;  % frekvencia budenia fb = f0 [Hz]

for i=1:1:2

    OMEGA0 = sqrt(3*k/m); % vlastna kruhova frekvencia [rad/s]
    DELTA = 3*b(i)/(2*m); % konstanta utlmu /2 [1/s]
    OMEGAd = sqrt(abs(OMEGA0^2-DELTA^2));
                % vl. kruh. frekvencia tlmenej sustavy [rad/s]

    bp(i) = DELTA/OMEGA0; % pomerny utlm
    Td = 2*pi/OMEGAd;     % perioda - doba kmitu [s]
    fd = 1/Td;            % vl. frekvencia kmitania tlmenej sustavy [Hz]
    f0 = OMEGA0/(2*pi);   % vl. frekvencia kmitania netlmenej sustavy [Hz]

    % zaciatočne podmienky v case t=0
    fi0 = 0;             % zaciatočne vychylenie fi(0) [rad]

    % hranice casoveho intervalu riesenia
    t0 = 0;              % zaciatočný cas [s]
    t1 = 5;              % konečný cas [s]

    % dynamicka pohybova rovnica
    DPR = @(t,FI) [FI(2); -2*DELTA*FI(2)-OMEGA0^2*FI(1)+...
        3*Fb*sin(2*pi*fb*t)/(m*l)];

    % riesenie dynamickej pohybovej rovnice (diferencialnej rovnice)
    [t,FI] = ode45(DPR, [t0 t1], [fi0 0]);
        % riesenie FI(1) =  $\varphi(t)$  - uhl. pootocenie
        % riesenie FI(2) =  $\omega(t)$  - uhl. rychlost

    % vypocet uhl. zrychlenia  $\alpha(t)$  z DPR
    alfa = -2*DELTA*FI(:,2)-OMEGA0^2*FI(:,1)+3*Fb*sin(2*pi*fb*t)/(m*l);

    % zapis vysledkov pre b=10 do matice odozva1
    if (i==1) odozva1 = [t FI(:,1) FI(:,2) alfa]; end

    % zapis vysledkov pre b=0 do matice odozva2
    if (i==2) odozva2 = [t FI(:,1) FI(:,2) alfa]; end

end

% vykreslenie casovej odozvy  $\varphi(t)$ ,  $\omega(t)$ ,  $\alpha(t)$ 
figure
hold on
title(['ČASOVÁ ODOZVA SÚSTAVY PRI BUDENÍ VLASTNOU FREKVENCIOU '],...)
```

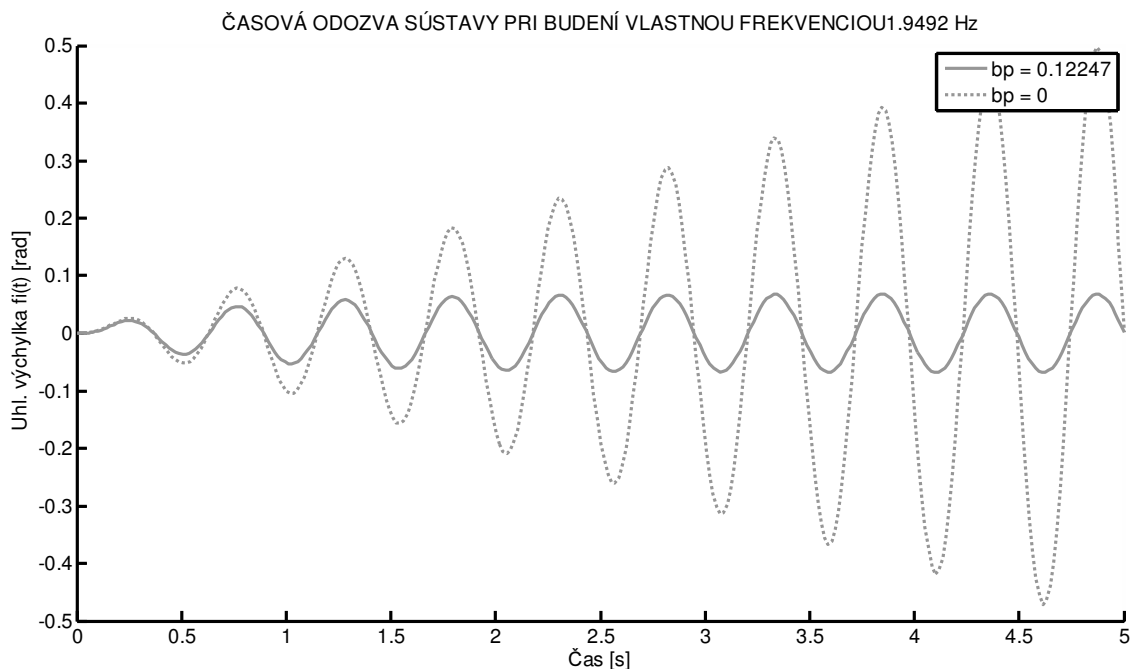
```

        num2str(f0), ' Hz']);
plot(odozva1(:,1), odozva1(:,2), '-', 'color', 'green')
plot(odozva2(:,1), odozva2(:,2), ':', 'color', 'green')
legend(['bp = ', num2str(bp(1))], ['bp = ', num2str(bp(2))])
xlabel('Čas [s]')
ylabel('Uhl. výchylka  $\phi(t)$  [rad]')

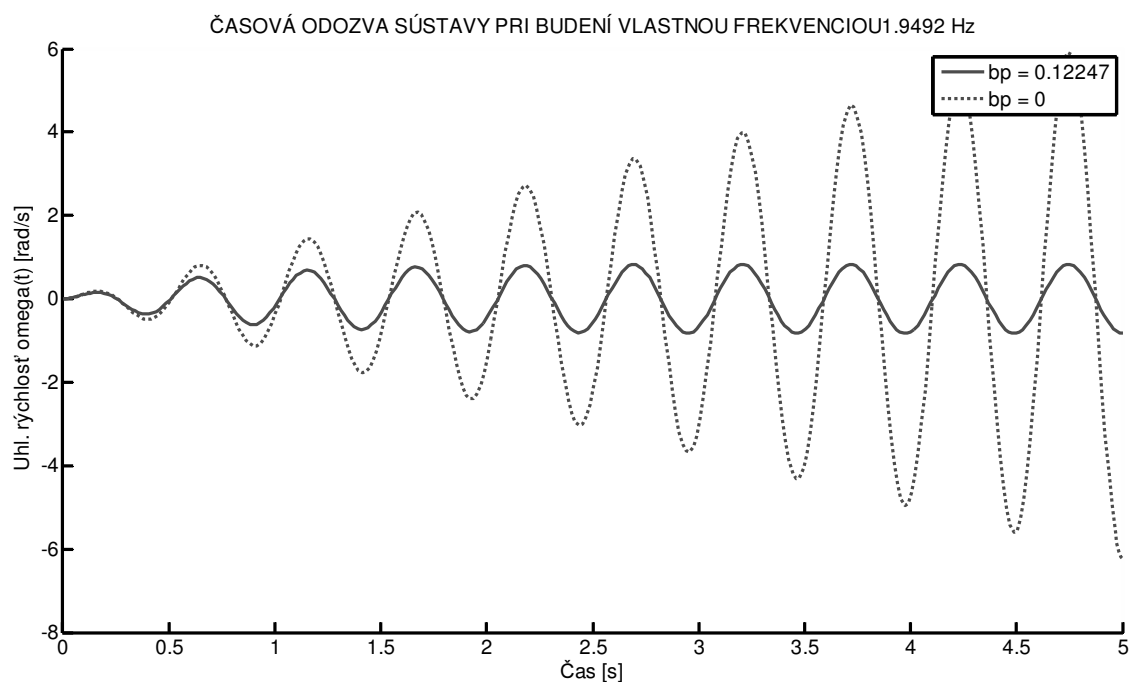
figure
hold on
title(['ČASOVÁ ODOZVA SÚSTAVY PRI BUDENÍ VLASTNOU FREKVENCIOU ', ...
        num2str(f0), ' Hz']);
plot(odozva1(:,1), odozva1(:,3), '-', 'color', 'red')
plot(odozva2(:,1), odozva2(:,3), ':', 'color', 'red')
legend(['bp = ', num2str(bp(1))], ['bp = ', num2str(bp(2))])
xlabel('Čas [s]')
ylabel('Uhl. rýchlosť  $\omega(t)$  [rad/s]')

figure
hold on
title(['ČASOVÁ ODOZVA SÚSTAVY PRI BUDENÍ VLASTNOU FREKVENCIOU ', ...
        num2str(f0), ' Hz']);
plot(odozva1(:,1), odozva1(:,4), '-', 'color', 'blue')
plot(odozva2(:,1), odozva2(:,4), ':', 'color', 'blue')
legend(['bp = ', num2str(bp(1))], ['bp = ', num2str(bp(2))])
xlabel('Čas [s]')
ylabel('Uhl. zrýchlenie  $\alpha(t)$  [rad/s2]')

```



Obr. 11.34 Časová odozva výchylky kmitania nosníka pri budení vlastnou frekvenciou



Obr. 11.35 Časová odozva rýchlosti kmitania nosníka pri budení vlastnou frekvenciou



Obr. 11.36 Časová odozva zrýchlenia kmitania nosníka pri budení vlastnou frekvenciou

Z porovnania priebehov časovej odozvy sústavy budenej harmonickou silou s vlastnou frekvenciou kmitania sústavy vyplýva, že v prípade, keď sústava stratí svoje tlmiace vlastnosti, porastú výchylky kmitania nebezpečne nad všetky medze.

## LITERATÚRA

- [1] Bať, M., I., Džanelidze, G., J., Keľzon, A., S.: Teoretičeskaja mechanika v primerach i zadačach II, Nauka, Moskva 1972
- [2] Ivanov, G., M., a kol.: Sbornik zadač po techničeskoj mechanike, Leningrad, Gosizdat, 1953
- [3] Jablonskij, A., A., a kol.: Sbornik zadač dl'a kursovych robot po teoretičeskoj mechanike, Moskva, Vyššaja škola, 1972
- [4] Kepe, O., E.: Sbornik korotkich zadač po teoretičeskoj mechanike, Moskva, Vyššaja škola, 1989
- [5] Kolesnikov, K., S.: Sbornik zadač po teoretičeskoj mechanike, Moskva, Nauka, 1983
- [6] Medvec, A., Stradiot, J., Záhorec, O., Caban, S.: Dynamika, Bratislava, Alfa, 1988
- [7] Meščerskij, I., V.: Sbornik zadač po teoretičeskoj mechanike, Moskva, Nauka, 1986
- [8] MSC.Software: MSC.Adams®, Online help
- [9] The MathWorks, Inc.: Learning Matlab 7, ISBN 0-9755787-6-6, 2005
- [10] The MathWorks, Inc.: Matlab 7 Getting Started Guide, 2010
- [11] Záhorec, O., Michalíček, M., Žiaran, S.: Dynamika, Zbierka príkladov, Bratislava, ISBN 80-05-00718-3, Alfa, 1991



Rukopis neprešiel jazykovou úpravou.

Názov publikácie:	Dynamika v príkladoch
Vydavateľ:	Technická univerzita v Košiciach, Strojnícka fakulta
Autori:	prof. Ing. Jozef Bocko, CSc., Ing. Jozef Filas, CSc., Ing. Róbert Huňady, PhD., Ing. Peter Sivák, PhD.
Miesto a rok vydania:	Košice, 2011
Vydanie:	prvé
Náklad:	50
ISBN	978-80-553-0832-6