

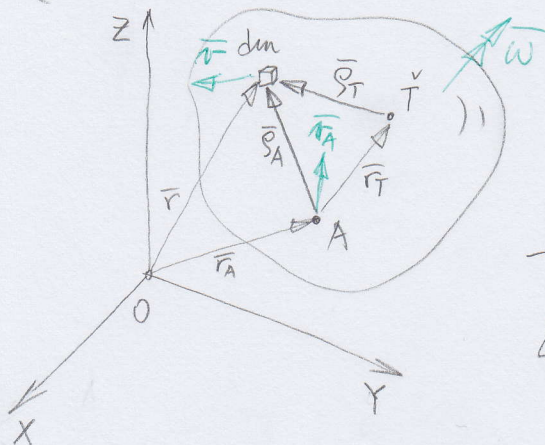
6. DYNAMIKA TELES V 3D PRIESTORE

DYNAMIKA 511

6.1 MOMENT ZOTRVAČNOSTI TELES K BODU

- uvažujeme teleso konajúce nerotčný priestorový pohyb v mimerizovanom systéme $OXYZ$

- tento pohyb môžeme rozdeliť na transláčny pohyb jedného jeho (referenčného) bodu a sférický pohyb tela okolo tohto bodu



- nech zvolíme referenčným bodom je bod A (ľubovoľný bod)

- moment hybnosti telesa k bodu A:

$$\bar{L}_A = \int_{(m)} \bar{p}_A \times \bar{r} dm; \text{ kde: } \bar{v} = \bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{p}_A$$

\bar{v}_A - rýchlosť transláčného pohybu bodu A

$\bar{\omega}$ - uhlová rýchlosť rotácie pohybu okolo bodu A

$$\bar{L}_A = \int_{(m)} [\bar{p}_A \times (\bar{v}_A + \bar{\omega} \times \bar{p}_A)] dm$$

$$\bar{L}_A = \int_{(m)} \bar{p}_A dm \times \bar{v}_A + \int_{(m)} \bar{p}_A \times (\bar{\omega} \times \bar{p}_A) dm \quad (1)$$

- ak je bod A stredom sférického pohybu, t.j. pevný bod $\Rightarrow \bar{v}_A = \bar{0}$:

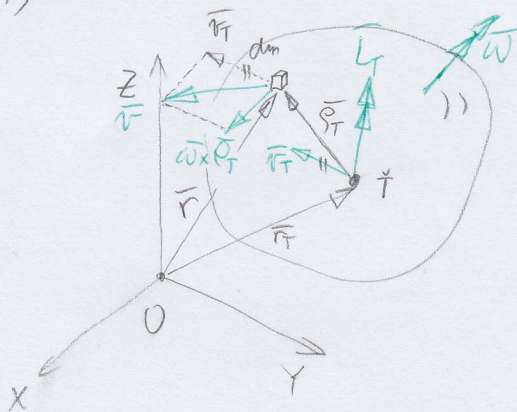
$$z(1): \bar{L}_A = \int_{(m)} \bar{p}_A \times (\bar{\omega} \times \bar{p}_A) dm \quad (2)$$

- ak je referenčným bodom ťažisko T telesa, t.j. $A \equiv T \Rightarrow \bar{r}_A = \bar{r}_T$; $\bar{p}_A = \bar{p}_T$:

$$\bar{L}_T = \int_{(m)} \bar{p}_T dm \times \bar{v}_T + \int_{(m)} \bar{p}_T \times (\bar{\omega} \times \bar{p}_T) dm$$

$$z(1): \bar{L}_T = \int_{(m)} \bar{p}_T \times (\bar{\omega} \times \bar{p}_T) dm \quad (3)$$

moment hybnosti telesa vzhľadom na ťažisko T



-moment hybnosti telesa k bodu O (ak ref. bodom je ťažisko T)

$$\vec{L}_O = \int_{(m)} \vec{r} \times \vec{v} \, dm ; \text{ kde: } \vec{r} = \vec{r}_T + \vec{\rho}_T$$

$$\vec{v} = \vec{v}_T + (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_T)$$

$$\vec{L}_O = \int_{(m)} [(\vec{r}_T + \vec{\rho}_T) \times (\vec{v}_T + \vec{\omega} \times \vec{\rho}_T)] \, dm = \underbrace{\vec{r}_T \times \vec{v}_T}_{\vec{L}_T} \int_{(m)} dm + \underbrace{\vec{r}_T \times (\vec{\omega} \times \int_{(m)} \vec{\rho}_T \, dm)}_{\vec{0}} + \underbrace{\int_{(m)} \vec{\rho}_T \, dm \times \vec{v}_T}_{\vec{0}} + \int_{(m)} \vec{\rho}_T \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_T) \, dm$$

$$\vec{L}_O = \vec{r}_T \times m \vec{v}_T + \int_{(m)} \vec{\rho}_T \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_T) \, dm \quad (4)$$

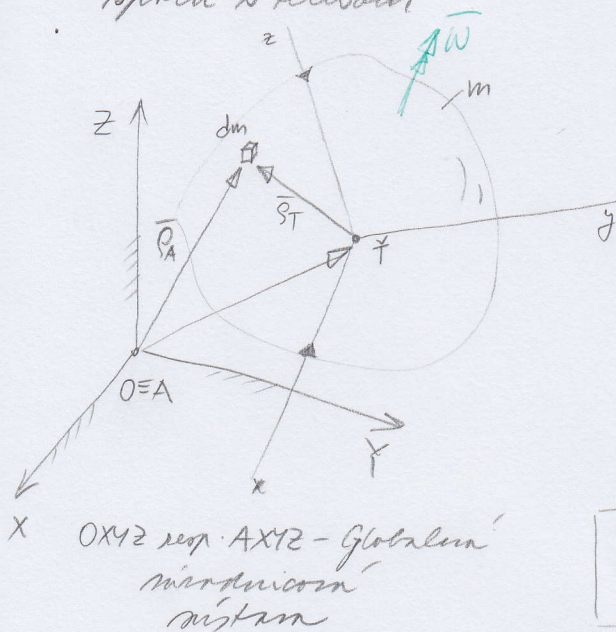
$$\vec{L}_O = \vec{r}_T \times m \vec{v}_T + \vec{L}_T$$

Moment hybnosti k bodu O sa rovná súčtu momentu hybnosti ťažiska T k bodu O a momentu hybnosti telesa vzhľadom na jeho ťažisko

Poznámka: Ak je ref. bodom ťažisko telesa, teleso bude mať ťažisko vstredu a moment hybnosti telesa sa rovná momentu hybnosti ťažiska

2. ZLOŽKY VEKTORA MOMENTU HYBNOSTI

Zavedme lokálnu mieračnicovú sústavu telesa T, x, y, z , ktorej sa približuje správa s telesom



- keďže moment hybnosti telesa \vec{L}_T k ťažisku T a \vec{L}_A k ľubovoľnému bodu A v priestore majú rovnakú formu (rov. (2) a (3)):

$$\vec{L} = \int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \, dm,$$

môžeme složky vektora \vec{L} vyjadriť maticovo pre obidva prírody (resp. mieračnicové sústavy)

$$\vec{L} = \int \vec{\rho} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}) \, dm = \begin{bmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{bmatrix}$$

$$\text{kde: } \vec{L} = L_x \vec{i} + L_y \vec{j} + L_z \vec{k}$$

$$\vec{\omega} = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k}$$

$$\vec{\rho} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$$

$$\begin{aligned}
 (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= (\omega_y z - \omega_z y) \vec{i} + (\omega_z x - \omega_x z) \vec{j} + (\omega_x y - \omega_y x) \vec{k} \\
 \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ (A) & (B) & (C) \end{vmatrix} = [(y^2 + z^2)\omega_x - xy\omega_y - xz\omega_z] \vec{i} + [-xy\omega_x + (z^2 + x^2)\omega_y - yz\omega_z] \vec{j} + \\
 &\quad + [-zx\omega_x - zy\omega_y + (x^2 + y^2)\omega_z] \vec{k}
 \end{aligned}$$

potom:

$$\begin{aligned}
 L_x &= \omega_x \int (y^2 + z^2) dm - \omega_y \int xy dm - \omega_z \int xz dm \\
 L_y &= -\omega_x \int xy dm + \omega_y \int (x^2 + z^2) dm - \omega_z \int yz dm \\
 L_z &= -\omega_x \int xz dm - \omega_y \int zy dm + \omega_z \int (x^2 + y^2) dm
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_x &= I_{xx} \omega_x - D_{xy} \omega_y - D_{xz} \omega_z \\
 L_y &= -D_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y - D_{yz} \omega_z \\
 L_z &= -D_{zx} \omega_x - D_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z
 \end{aligned} \rightarrow \boxed{\vec{L} = \vec{I} \cdot \vec{\omega}}$$

- ak sú rotačné osi x, y, z hlavnými osami rotácie (1, 2, 3) potom
 derivácie momenty sú rovné 0 a $I_{xx} = I_1, I_{yy} = I_2, I_{zz} = I_3$, kde
 I_1, I_2, I_3 sú hlavné momenty rotácie \rightarrow potom,

$$\begin{aligned}
 L_x &= I_1 \omega_x \\
 L_y &= I_2 \omega_y \\
 L_z &= I_3 \omega_z
 \end{aligned}$$

6.2 VETÝ O POHYBE TELESA

Veta o zmene hybnosti telesa

$$\Delta \vec{H} = \vec{H}_1 - \vec{H}_0 = \vec{I}_F$$

$$(1) \quad m \vec{r}_{T1} - m \vec{r}_{T0} = \sum_i \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_i dt \rightarrow \text{Zmena hybnosti telesa má rovnú impulzu} \\
\text{všetkých vonkajších síl, ktoré na teleso} \\
\text{pôsobia v danom čase}$$

$$x: m r_{Tx1} - m r_{Tx0} = \sum_i \int_{t_0}^{t_1} F_{ix} dt$$

$$y: \dots$$

$$z: \dots$$

Veta o zmene momentu hybnosti

$$\Delta \bar{L}_A = \bar{L}_{A1} - \bar{L}_{A0} = \bar{I} \bar{\omega}_A$$

$$(2) \quad \bar{I} \bar{\omega}_1 - \bar{I} \bar{\omega}_0 = \sum_i \int_{t_0}^{t_1} \bar{M}_{iA} dt$$

→ zmena momentu hybnosti k referenčnému bodu sa rovná impulzu momentov všetkých vnútorných síl k tomuto bodu

! kde bod A → ťažisko ($A \equiv T$)
 → pevný bod v priestore ($A \equiv O$)

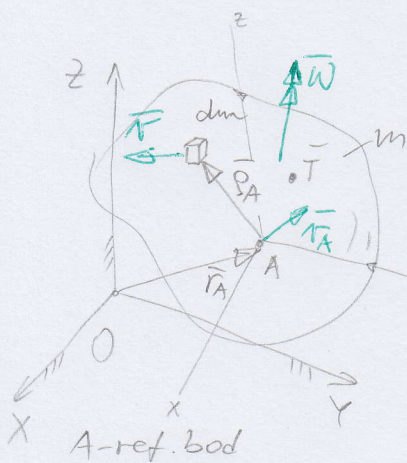
$$x: L_{x1} - L_{x0} = \sum_i \int_{t_0}^{t_1} M_{ix} dt$$

$$y: L_{y1} - L_{y0} = \sum_i \int_{t_0}^{t_1} M_{iy} dt$$

$$z: L_{z1} - L_{z0} = \sum_i \int_{t_0}^{t_1} M_{iz} dt$$

osi x, y, z prechádzajú bodom A

→ v prípade 3D telies rovnice (1) a (2) predstavujú sústavu 6 skalárnych rovníc

6.3 KINETICKÁ ENERGIA

$$E_k = \frac{1}{2} \int_{(m)} v^2 dm = \frac{1}{2} \int \bar{v} \cdot \bar{v} dm$$

$\bar{r} = \bar{r}_A + (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_A)$ → relatívna rýchlosť elementu pri rýchlosti translácie a sférickej rotácii okolo bodu A

$$r^2 = (\bar{r}_A + \bar{\omega} \times \bar{\rho}_A) \cdot (\bar{r}_A + \bar{\omega} \times \bar{\rho}_A) = r_A^2 + 2\bar{r}_A \cdot (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_A) + (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_A) \cdot (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_A)$$

$$\text{preto: } E_k = \frac{1}{2} r_A^2 \int_{(m)} dm + \bar{r}_A \cdot (\bar{\omega} \times \int \bar{\rho}_A dm) + \frac{1}{2} \int (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_A) \cdot (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_A) dm$$

$$E_k = \frac{1}{2} m r_A^2 + \bar{r}_A \cdot (\bar{\omega} \times \int \bar{\rho}_A dm) + \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \underbrace{\int \bar{\rho}_A \times (\bar{\omega} \times \bar{\rho}_A) dm}_{\bar{L}_A}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m r_A^2 + \frac{1}{2} \bar{L}_A \bar{\omega} + \bar{r}_A \cdot (\bar{\omega} \times \int \bar{\rho}_A dm)$$

↓
 meraný prípad → bod A je uvoľnený bod

a) referenčným bodom je ťažisko T, t.j. $A=T$; $\bar{r}_A=\bar{r}_T$; $\bar{p}_A=\bar{p}_T$

$$\int \bar{p}_T dm = \bar{0}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} \bar{L}_T \cdot \bar{\omega}$$

kinet. energia
translačného pohybu
ťažiska

kinet. energia
sférického pohybu telesa
okolo ťažiska

kde: $\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}$

$$\bar{L}_T = \left[I_{xx} \omega_x - D_{xy} \omega_y - D_{xz} \omega_z \right] \bar{i} + \left[-D_{yx} \omega_x + I_{yy} \omega_y - D_{yz} \omega_z \right] \bar{j} + \left[-D_{zx} \omega_x - D_{zy} \omega_y + I_{zz} \omega_z \right] \bar{k}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} \left(I_{xx} \omega_x^2 + I_{yy} \omega_y^2 + I_{zz} \omega_z^2 - 2D_{xy} \omega_x \omega_y - 2D_{yz} \omega_y \omega_z - 2D_{zx} \omega_z \omega_x \right)$$

! momenty rotácie a deviatkové momenty musia byť vyjadrené voči centrálnym osiam x, y, z (prechádzajúcim ťažiskom)

- ak teleso vykonáva rovinný pohyb iba okolo jednej osi, napr. osi z ,
t.j. $\omega_x = \omega_y = 0$; $\omega = \omega_z \neq 0$, potom: $E_k = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} I_z \omega^2$

(ak je $\bar{r}_T = \bar{0}$, čo z prvej osi usúdiť)

b) bod A je perný bod, t.j. je stredom sférického pohybu: $\bar{r}_A = \bar{0}$

$$E_k = \frac{1}{2} \bar{L}_A \cdot \bar{\omega}$$

! momenty rotácie a deviatkové momenty musia byť vyjadrené voči osiam prechádzajúcim bodom A

→ ak sú to hlavné osi rotácie, potom: $D_{xy} = D_{yz} = D_{zx} = 0$; $I_{xx} = I_1$, $I_{yy} = I_2$, $I_{zz} = I_3$

$$E_k = \frac{1}{2} I_1 \omega_x^2 + \frac{1}{2} I_2 \omega_y^2 + \frac{1}{2} I_3 \omega_z^2$$

Petr a mechanická energia: $E_k + E_p = \text{konst.}$

Petr o zmene kinetickej energie: $E_{k1} - E_{k0} = A^*$ - práca všetkých pracovných síl a momentov

- uvažujeme teleso, ktoré kann' nerobiacu' priestorový pohyb
- náš referenčný bodom je ťažisko T telesa (alter. bod A)

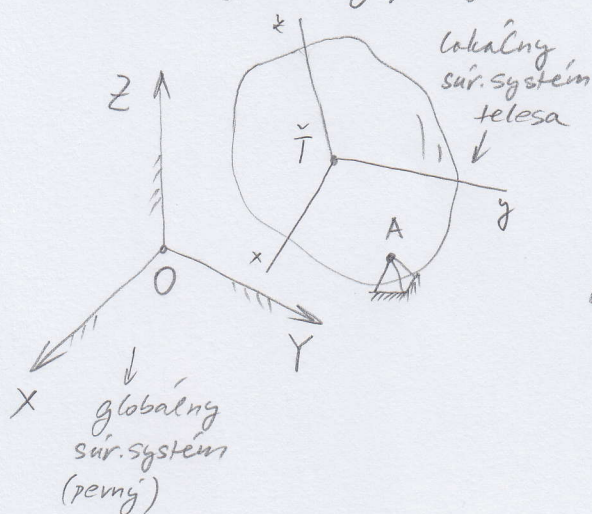
PR transláčnej rovňoby pohybu:

$$\begin{aligned} m\bar{a}_T &= \sum \bar{F}_i \\ x: m\bar{a}_{Tx} &= \sum F_{ix} \\ y: m\bar{a}_{Ty} &= \sum F_{iy} \\ z: m\bar{a}_{Tz} &= \sum F_{iz} \end{aligned} \quad (1)$$

alter:

$$m\bar{a}_A = \sum \bar{F}_i$$

PR sféricky rovňoby pohybu:



$$\left(\frac{d\bar{L}_T}{dt} \right)_{xyz} = \sum \bar{M}_{iT} \quad (2)$$

alter:

$$\left(\frac{d\bar{L}_A}{dt} \right)_{xyz} = \sum \bar{M}_{iA}$$

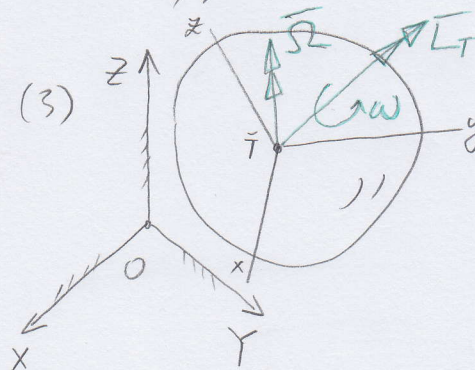
Derivácie vektora hybnosti podľa času sú robíme v globálnom súřadnicovom systéme OXYZ a nie v lokálnom systéme Txyz telesa, ktorý sa sám pohybuje

- ak máme vektor momentu hybnosti \bar{L} vyjadrený k osiam x, y, z pohybujuceho sa súřadnicového systému telesa, musíme časom derivácia momentu hybnosti prekládajúť vzhľadom na globálnu priestor.

- uvažujeme, že uhlová rýchlosť pohybujúceho systému je $\bar{\Omega}$, nakoľko uhlová rýchlosť otáčania telesa je $\bar{\omega}$, podľa rovnice (2):

$$\sum \bar{M}_{iT} = \left(\frac{d\bar{L}_T}{dt} \right)_{xyz} + \bar{\Omega} \times \bar{L}_T \quad (3)$$

→ vektor $\bar{\Omega}$ má vyjadrenie v globálnom priestore OXYZ



- osi x, y, z by mali byť vlnené tak, aby momentové pohybové rovnice k nim boli čo najjednoduchšie (x)

(*) Existujú tu súhodné spôsoby:

1.) $\boxed{\bar{\Omega} = \bar{0}}$ \rightarrow lokálny inerciálny systém vybraný iba transláciou
pohyb, t.j. nenávisť sa s telom

- keďže v nespojitosti telos môže rotovať nullova rýchlosťou
 $\bar{\omega} \neq \bar{0}$, momenty rotácie a deviačné momenty sú
funkciami času \rightarrow komplikovaná úloha!

\Rightarrow nvhodný spôsob

2.) $\boxed{\bar{\Omega} = \bar{\omega}}$ \rightarrow lokálny inerciálny systém sa pohybuje (posúva aj
otáča) spolu s telom, t.j. je s ním pevne spojený

- momenty rotácie a deviačné momenty sú konstantné

$$\boxed{\sum \bar{M}_i = \left(\frac{d\bar{L}}{dt} \right)_{xyz} + \bar{\omega} \times \bar{L}} \quad (4)$$

$$x: \sum M_{ix} = I_{xx} \dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz}) \omega_y \omega_z - I_{xy} (\dot{\omega}_y - \omega_z \omega_x) - I_{yz} (\omega_y^2 - \omega_z^2) - I_{zx} (\dot{\omega}_z + \omega_x \omega_y)$$

$$y: \sum M_{iy} = I_{yy} \dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx}) \omega_z \omega_x - I_{yz} (\dot{\omega}_z - \omega_x \omega_y) - I_{zx} (\omega_z^2 - \omega_x^2) - I_{xy} (\dot{\omega}_x + \omega_y \omega_z)$$

$$z: \sum M_{iz} = I_{zz} \dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy}) \omega_x \omega_y - I_{zx} (\dot{\omega}_x - \omega_y \omega_z) - I_{xy} (\omega_x^2 - \omega_y^2) - I_{yz} (\dot{\omega}_y + \omega_z \omega_x)$$

- pre prívinný pohyb: $\bar{\omega} = \omega_z \bar{k}$; $\omega_x = \omega_y = 0$

$$\sum M_{ix} = -I_{zx} \dot{\omega}_z + I_{yz} \dot{\omega}_z$$

$$\sum M_{iy} = -I_{yz} \dot{\omega}_z - I_{zx} \dot{\omega}_z$$

$$\sum M_{iz} = I_z \dot{\omega}_z \quad ; \quad \text{kde } \dot{\omega}_z = \alpha_z$$

ak je os z hlavnou osou rotácie:

$$I_{zx} = I_{yz} = 0 \Rightarrow \sum M_{ix} = 0; \sum M_{iy} = 0; \sum M_{iz} = I_z \alpha$$

- ak sú osi x, y, z hlavné osi rotácie (t.j. $D_{xy} = D_{yz} = D_{zx} = 0$),
potom rovnice (4):

$$\begin{aligned} \sum M_{ix} &= I_1 \dot{\omega}_x - (I_2 - I_3) \omega_y \omega_z \\ \sum M_{iy} &= I_2 \dot{\omega}_y - (I_3 - I_1) \omega_z \omega_x \\ \sum M_{iz} &= I_3 \dot{\omega}_z - (I_1 - I_2) \omega_x \omega_y \end{aligned} \rightarrow \text{Eulerove pohybové rovnice} \quad (5a)$$

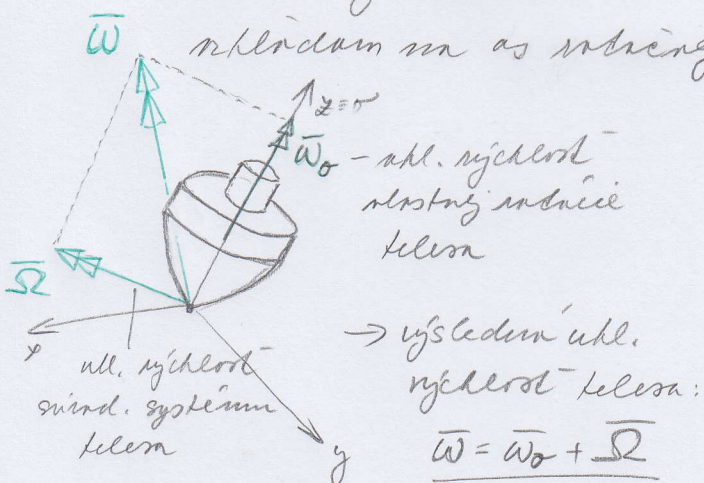
kde $I_1 = I_{xx}$; $I_2 = I_{yy}$; $I_3 = I_{zz}$ - sú hlavné momenty rotácie

- vektor uhlovej rýchlosti:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{xyz} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{xyz} + \underbrace{\vec{\omega} \times \vec{\omega}}_{\vec{0}} = \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{xyz} \\ \Rightarrow \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{xyz} &= \left(\frac{d\vec{\omega}}{dt} \right)_{xyz} \end{aligned}$$

- 3.) $\boxed{\vec{\Omega} \neq \vec{\omega}}$ \rightarrow rotácie nie sú rovinné symetrické telos (napr. gyroskop),
keďže ak symetria je rovnou osou vlastnej rotácie
teles (os o)

- momenty rotácie a derivácie momenty sú konstantné
vzhľadom na os rotácie symetrického telos



$$\vec{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \omega_o + \Omega_z \end{bmatrix}$$

$$\sum \vec{M}_i = \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_{xyz} + \vec{\Omega} \times \vec{L}$$

- keď sú osi x, y, z sú hlavné osi:

$$L_x = I_x \omega_x$$

$$L_y = I_y \omega_y$$

$$L_z = I_z \omega_z$$

$$\vec{\Omega} \times \vec{L} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ L_x & L_y & L_z \end{vmatrix}$$

*)

$$\Sigma M_{ix} = I_x \dot{\omega}_x - I_z \Omega_z \omega_y + I_z \Omega_y \omega_z$$

$$\Sigma M_{iy} = I_y \dot{\omega}_y - I_z \Omega_x \omega_z + I_x \Omega_z \omega_x$$

$$\Sigma M_{iz} = I_z \dot{\omega}_z - I_x \Omega_y \omega_x + I_y \Omega_x \omega_y$$

→ Modifikované Eulerove
polýbové rovnice
(56)

keďže sločky $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ sú vyjadrené k osiam x, y, z

- akčné rýchlenie tela:

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}_{xyz} + \vec{\Omega} \times \vec{\omega} \quad ; \quad \vec{\omega} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \Omega_x & \Omega_y & \Omega_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix}$$