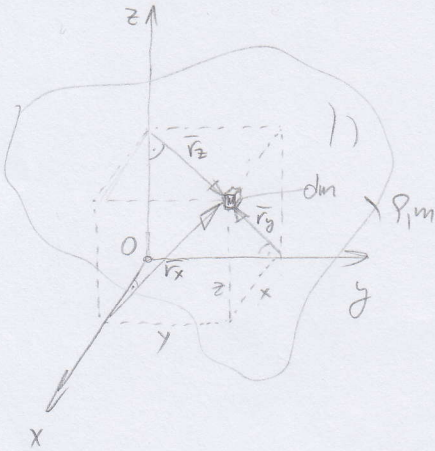


4.1 MOMENTY ZOTRAČNOSTI 3D TELESA

- moment zotrvačnosti je definovaný ako miera hmotnosti (teleso) a jej vzdialenosti od zvoleného geometr. útvaru (os, rovinu...)

Momenty zotrvačnosti telesa k osiam → m' má vždy kladné



$$I_{xx} = \int_{(m)} r_x^2 dm = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$I_{yy} = \int_{(m)} r_y^2 dm = \int (x^2 + z^2) dm$$

$$I_{zz} = \int_{(m)} r_z^2 dm = \int (x^2 + y^2) dm$$

kde: $dm = \rho dx dy dz$

- ak sú x, y, z prechádzajúť tváriskom telesa majúme ich centrálnu osi (→ momenty zotrvačnosti k centráln. osiam)

→ polárny moment zotrvačnosti (k počiatku SS)

t.j. k bodu O: $I_p = \int_{(m)} (x^2 + y^2 + z^2) dm$

Deviáčne momenty telesa (~~k 2 osiam resp k 2 ortogonáln. rovinám~~)
(products of inertia)

→ m' má mieru symetrie telesa - charakterizujú symetriu rozloženia hmotnosti telesa súčlnosť k dvom navzájom kolovým rovinám

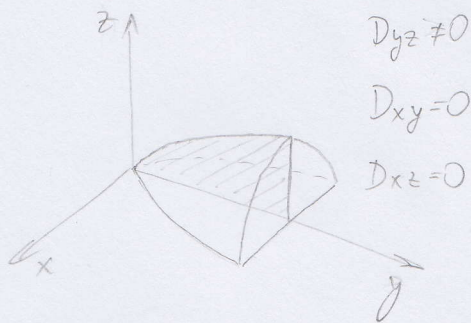
→ môžu byť kladné, záporné alebo nulové

$$I_{xy} = \int xy dm = I_{yx}$$

$$I_{yz} = \int yz dm = I_{zy}$$

$$I_{zx} = \int zx dm = I_{xz}$$

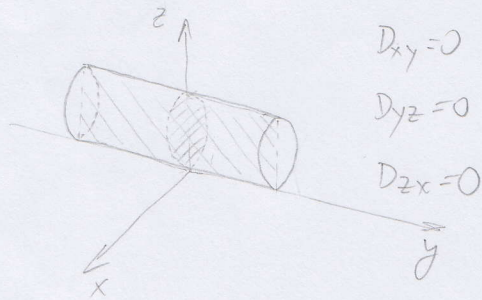
- ak aspin ječlen na m'ľodnykh stran p'ustom je rovinu symetrie telesu, potom derivácie momenty k súvisným 2 bodným rovinám m'ulore'



$$D_{yz} \neq 0$$

$$D_{xy} = 0$$

$$D_{xz} = 0$$

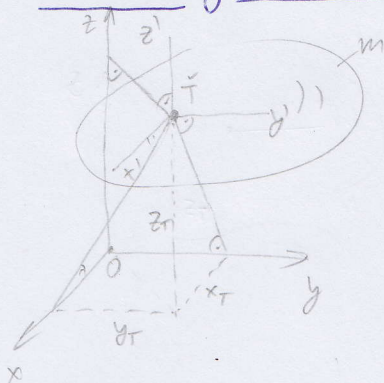


$$D_{xy} = 0$$

$$D_{yz} = 0$$

$$D_{zx} = 0$$

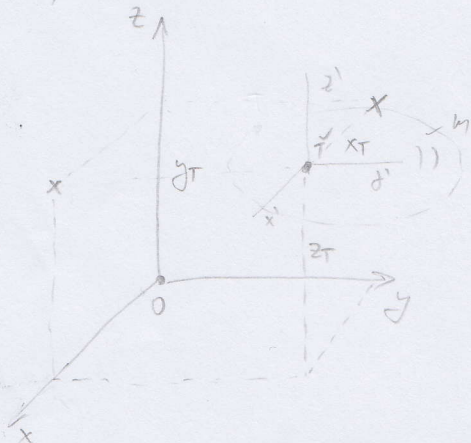
Momenty zotrvačnosti k posunutým osiam / rovinám



$$I_{xx} = I_{xx'} + m(x_T^2 + z_T^2)$$

$$I_{yy} = I_{yy'} + m(x_T^2 + z_T^2)$$

$$I_{zz} = I_{zz'} + m(x_T^2 + y_T^2)$$

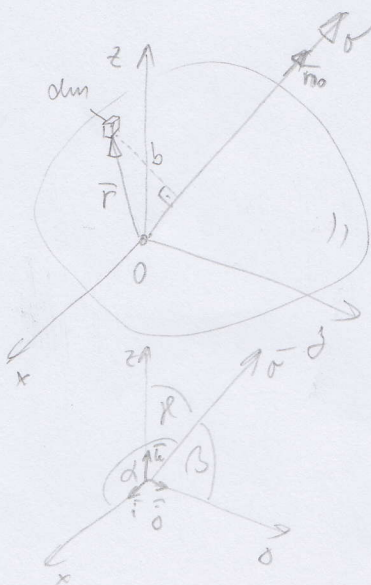


$$D_{xy} = D_{xy'} + m x_T y_T$$

$$D_{yz} = D_{yz'} + m y_T z_T$$

$$D_{zx} = D_{zx'} + m z_T x_T$$

Moment zotrvačnosti k ľubovolnej osi



$$I_o = \int_{(m)} (\bar{n}_o \times \bar{r})^2 dm = \int_{(m)} (\bar{n}_o \times \bar{r}) (\bar{n}_o \times \bar{r}) dm$$

$$\text{ kde: } \bar{n}_o = n_x \bar{i} + n_y \bar{j} + n_z \bar{k}$$

$$n_x = \cos \alpha, n_y = \cos \beta, n_z = \cos \gamma \rightarrow \text{smerné kosínusy}$$

$$\bar{r} = x \bar{i} + y \bar{j} + z \bar{k}$$

$$(\bar{n}_o \times \bar{r}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ n_x & n_y & n_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = (n_y z - n_z y) \bar{i} + (n_z x - n_x z) \bar{j} + (n_x y - n_y x) \bar{k}$$

$$I_o = I_{xx} n_x^2 + I_{yy} n_y^2 + I_{zz} n_z^2 - 2D_{xy} n_x n_y - 2D_{yz} n_y n_z - 2D_{zx} n_z n_x$$

TENZOR ZOTRVAČNOSTI \bar{I}

$$\bar{I} = \begin{vmatrix} I_{xx} & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{yx} & I_{yy} & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{zy} & I_{zz} \end{vmatrix}$$

→ vektorene charakteristik telies a priestore je kongruentne popísané 6 momentami zotrvačnosti

→ symetrický

- súradnicový systém telies je určený maticou tak, že diagonálne momenty telies a súhodiny sú rovné nule. Teda rovné nule, jekei sú m' hlavnými osami zotrvačnosti (1,2,3)

$$\bar{I} = \begin{vmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{vmatrix}$$

→ I_1, I_2, I_3 - hlavné momenty zotrvačnosti

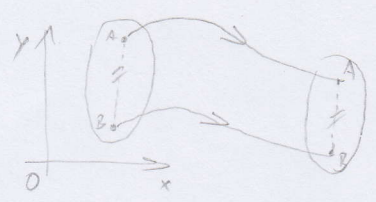
5. DYNAMIKA ROVINNEHO POMYBU TELESÁ

- telies hrom' rovinný pohyb, ak všetky jeho body pohybujú a rovinných smerech rovnobežných s referenčnou rovinou pohybu

5.1 POMYBOVÉ ROVNICE

TRANSLAČNÝ POMYB

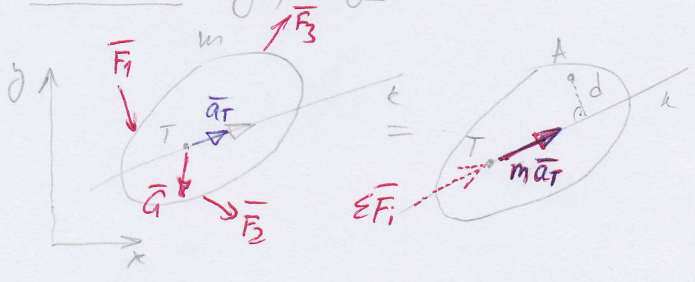
- telies hrom' translacný (posunový) pohyb, ak spojnicu ľubovoľných dvoch jeho bodov pri pohybe nemení svoj smer



→ keď všetky body telies sa pohybujú po identických súbežných čiarach a s rovnou rý. akurát sa zmení rovnosť a rýchlosť, pohyb telies môžeme popísať pohybom ľubovoľného jeho bodu napr. ťažiska
→ referenčný bod

$$m \bar{a}_T = \sum \bar{F}_i$$

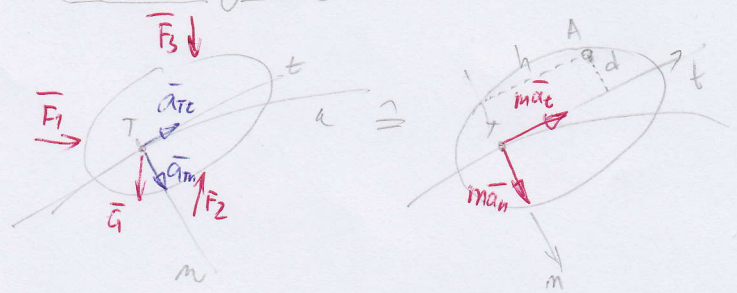
Priamočiary pohyb



$$\begin{cases} x: m a_x = \sum F_{ix} & (1) \\ y: m a_y = \sum F_{iy} & (2) \\ T: 0 = \sum M_{iT} & (3) \end{cases}$$

alebo: $A: m a_T d = \sum M_{iA} \quad (3^*)$
 $a_T = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

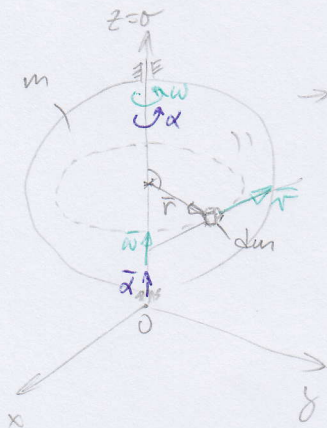
Krivočiary pohyb



$$\begin{cases} t: m a_t = \sum F_{it} & (1) \\ n: m a_n = \sum F_{in} & (2) \\ T: 0 = \sum M_{iT} & (3) \end{cases}$$

alebo: $A: m a_t d + m a_n h = \sum M_{iA} \quad (3^*)$

- Telo hromádka, polye, al spojnic 2 jeho bodov je tvore n polye
Tato spojnic je ona rotacie, priesm mly body telu n polye
abolo nej pr krmu ciach linaic n pmdelnych smic 1 m n rotacie



→ moment hytnosti telu dolo ori o:

$$d\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v} dm; \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$d\vec{L} = \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) dm$$

$$d\vec{L} = r^2 \vec{\omega} dm \quad (\vec{L} \parallel \vec{\omega})$$

$$L = \omega \int r^2 dm$$

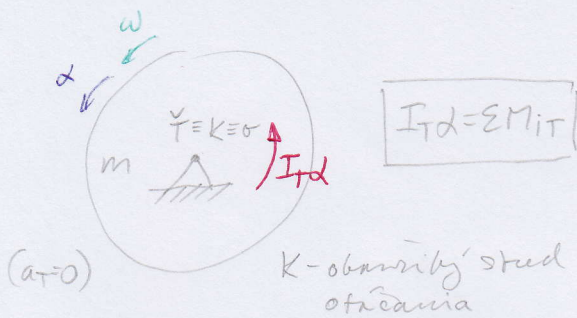
$$L = I_T \omega$$

$$\frac{dL}{dt} = I_T \frac{d\omega}{dt} = \sum M_{ir}$$

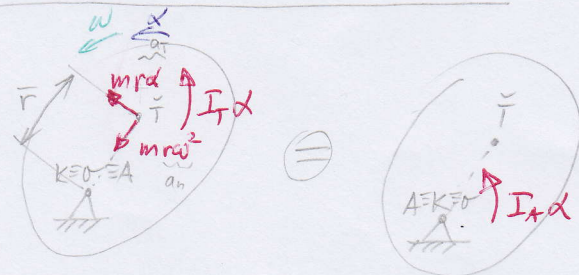
$$I_T \alpha = \sum M_{ir}$$

polyb. rovnica telu konajuceho
rotacny pohyb okolo pevnej ori

Centrālna rotācia (okolo ťažiska)



Rotācia okolo ľubovol. bodu



$$\sum M_{iA} = m r_A^2 \alpha + I_T \alpha = (I_T + m r_A^2) \alpha$$

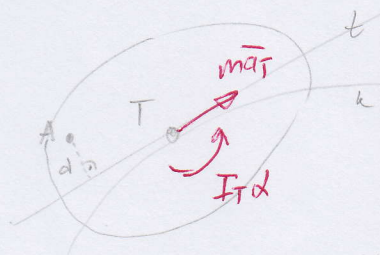
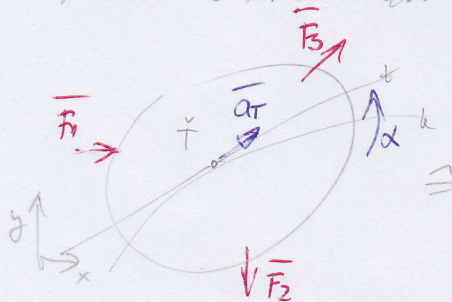
↓

$$I_{A,K} \alpha = \sum M_{iA}$$

$$; \text{ kde } I_{A,K} = I_T + m r_A^2$$

VŠEOBECNÝ ROVINNÝ POMYB

- vnútre superponovanu translacny pohyb jedneho (referenčného) bodu
telu n rotacny pohyb telu abolo toho bodu

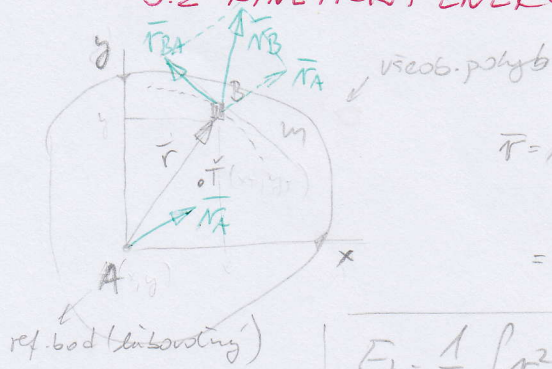


$$\begin{aligned} x: m a_x &= \sum F_{ix} \\ y: m a_y &= \sum F_{iy} \\ \ddot{\theta}: I_T \alpha &= \sum M_{iT} \end{aligned}$$

$$\text{alb: } A: m a_T d + I_T \alpha = \sum M_{iA}$$

5.2 KINETICKÁ ENERGIA, PRÁČA A VÝKON

KINETICKÁ ENERGIA



$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}_A + \vec{r}_{BA} = \vec{r}_A + \vec{\omega} \times \vec{r} = (r_{Ax}\vec{i} + r_{Ay}\vec{j}) \times \omega \vec{k} (x\vec{i} + y\vec{j}) = \\ &= r_{Ax}\vec{i} + r_{Ay}\vec{j} + \omega x\vec{j} - \omega y\vec{i} = (r_{Ax} - \omega y)\vec{i} + (r_{Ay} + \omega x)\vec{j}\end{aligned}$$

$$E_k = \frac{1}{2} \int r^2 dm$$

(m)

$$r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r} = \dots = r_A^2 + (x^2 + y^2)\omega^2 + 2(xr_{Ay} - yr_{Ax})\omega$$

$$E_k = \frac{1}{2} r_A^2 \int dm + \frac{1}{2} \omega^2 \int (x^2 + y^2) dm + r_{Ay} \omega \int x dm - r_{Ax} \omega \int y dm$$

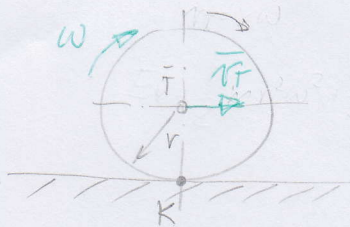
m I_A

$$E_k = \frac{1}{2} m r_A^2 + \frac{1}{2} I_A \omega^2 + r_{Ay} \omega \int x dm - r_{Ax} \omega \int y dm$$

- ak ref. bodom je ťažisko ($A \equiv T$): $\int x dm = 0$; $\int y dm = 0$

$\underbrace{\int x dm}_{S_y}$ $\underbrace{\int y dm}_{S_x}$

$$E_k = \frac{1}{2} m r_T^2 + \frac{1}{2} I_T \omega^2 \rightarrow \text{Königova veta (pre všet. mr. pohyb)}$$



$$r_T = r\omega \Rightarrow E_k = \frac{1}{2} m r^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_T \omega^2$$

$$E_k = \frac{1}{2} (I_T + m r^2) \omega^2$$

I_K

$$E_k = \frac{1}{2} I_K \omega^2 \rightarrow \text{ak plynúme K}$$

$$I_K = I_T + m r^2$$

- pre pohyb kladovúň: $E_k = \frac{1}{2} m r_T^2$ ($\omega = 0$)

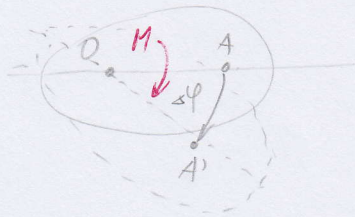
- pre ústredný pohyb: $E_k = \frac{1}{2} I_K \omega^2$ ($r_T = 0$)

PRÁČA

- práca síly: $dA = \vec{F} d\vec{r} \rightarrow \boxed{A = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} d\vec{r}} ; \vec{F} = \sum \vec{F}_i$

- práca sil. dvojice (momentu): $dA = \vec{M} d\vec{\varphi}$ (\vec{M} a $\vec{\varphi}$ m'usí byť lineárne)

$$\boxed{A = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M d\varphi} ; M = \sum M_i$$



ak je $M = \text{konst.}$: $A = M(\varphi_1 - \varphi_0)$

výkon

síly: $P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$

momentu: $P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{M} \cdot d\vec{\varphi}}{dt} = \vec{M} \cdot \vec{\omega}$

Věta o změně kinet. energie: $\Delta E_k = E_{k1} - E_{k0} = A^*$

Věta o zachování mech. energie: $E_k + E_p = \text{konst.}$

5.3 VĚTY O POHYBE TELES A

Věta o změně hybnosti (vzrůstá a posouvá se síla působící na těleso)

$$m \vec{a} = \sum \vec{F}_i ; \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$m \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} d\vec{r} = \sum \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_i dt \rightarrow$$

$$\boxed{m \vec{v}_{T1} - m \vec{v}_{T0} = \sum_i \int_{t_0}^{t_1} \vec{F}_i dt} \quad (1)$$

$$\boxed{\vec{H}_1 - \vec{H}_0 = \sum \vec{J}_i F}$$

ak $\sum \vec{F}_i = \vec{0}$: $\Delta \vec{H} = \vec{0} \Rightarrow m \vec{v}_{T1} = m \vec{v}_{T0}$; $\vec{v}_{T1} = \text{konst.}$

Věta o změně momentu hybnosti

$$I \alpha = \sum M_{i0}$$

$$I_0 \int_{\omega_0}^{\omega_1} d\omega = \sum_i \int_{t_0}^{t_1} M_{i0} dt \rightarrow$$

$$\boxed{I_0 \omega_1 - I_0 \omega_0 = \sum_i \int_{t_0}^{t_1} M_{i0} dt} \quad (2)$$

$$\boxed{L_01 - L_00 = \sum J_{i0}}$$

ak $\sum M_{i0} = 0$: $L_01 = L_00 = \text{konst.}$

↙
k o- a- os prechádzajúca
táčiškovým telom

- rovnice (1) a (2) tvoria pohybové rovnice tela, ktoré konajú mechanický rov. pohyb $\rightarrow (*)$

(*)

de jé ref. bolom fãrisher:

$$x: m_{Tx} - m_{Tx0} = \int_{t_0}^t F_{ix} dt$$

$$y: m_{Ty} - m_{Ty0} = \int_{t_0}^t F_{iy} dt$$

$$\tilde{T}: I_T \omega - I_T \omega_0 = \int_{t_0}^t M_{ir} dt$$

Koleso hmotnosti m a polomeru r , ktorého polomer rotácie je I_g , je uchytené pomocou tuhosti k , ktorej celná dĺžka je l_0 . Ob-
molené koleso s prietokom pružiny, na koleso máme odvalovať ku
smuľkaniu. Môže ísť o n. výberu v stacionár, keďže táto je podľa
dĺžku dĺžky b .

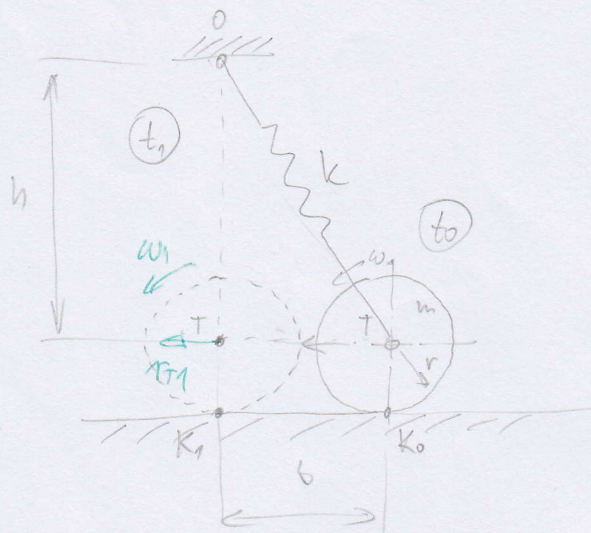
D: $m = 2 \text{ kg}$; $r = 0,175 \text{ m}$; $I_g = 0,16 \text{ m}^2$

$b = 3 \text{ m}$; $h = 4 \text{ m}$; $l_0 = 1 \text{ m}$

$k = 5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$

PP: $t_0 = 0$; $v_0 = 0$; $\omega_0 = 0$

H: ω_1



-Zákon zach. mech. en: $E_k + E_p = \text{const.}$

$$E_{k0} + E_{p0} = E_{k1} + E_{p1}$$

$$0 + \frac{1}{2} k \xi_0^2 = \frac{1}{2} I_k \omega_1^2 + \frac{1}{2} k \xi_1^2$$

↓
predĺženie
pružiny

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k(\xi_0^2 - \xi_1^2)}{I_k}}$$

$$\xi_0 = \sqrt{b^2 + h^2} - l_0 = \sqrt{3^2 + 4^2} - 1 = 4 \text{ m}$$

$$\xi_1 = h - l_0 = 4 - 1 = 3 \text{ m}$$

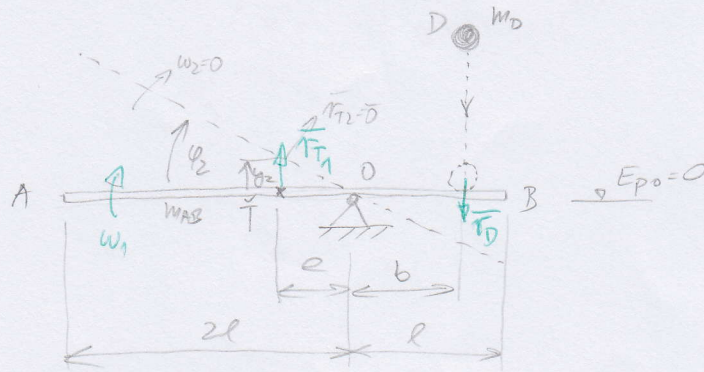
$$I_k = I_T + m r^2 = m i_g^2 + m r^2 = m (i_g^2 + r^2) = 2 (0,06^2 + 0,175^2) = 1,845 \text{ kg m}^2$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{5(4^2 - 3^2)}{1,845}} = 4,355 \text{ rad/s}$$

Homogénny bod a hmotnosť m_D masívneho priamy vodorovný nosník AB súčlenený v O . Následne maximálny uhol vychýlenia nosníka φ_2 , ak predpokladáme, že HB má bod pohybuť spoločne s ním.

D: $m_D = 2 \text{ kg}$
 $m_{AB} = 10 \text{ kg}$
 $v_D = 10 \text{ m s}^{-1}$
 $l = 0,4 \text{ m}$
 $b = 0,3 \text{ m}$

H: φ_2



náraz (0-1): $H_0 = H_1$ - hybnosť sa počas nárazu zachováva

$\gamma: m_D v_D = (m_D + m_{AB}) v_{T1}$

$v_{T1} = e \omega_1 = \left(\frac{3l}{2} - l \right) \omega_1 = \frac{l}{2} \omega_1$

$m_D v_D = (m_{AB} + m_D) \frac{l}{2} \omega_1$

$\omega_1 = \frac{2 m_D v_D}{l (m_{AB} + m_D)} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10}{0,4 (10 + 2)} = 8,333 \text{ rad s}^{-1}$

vychýlenie nosníka (1-2)

$E_{k1} + E_{p1} = E_{k2} + E_{p2}$

$\frac{1}{2} I_O \omega_1^2 + \Phi = \Phi + m g y_2$

$I_O = I_T + m e^2 = \frac{1}{2} m (3l)^2 + m \left(\frac{l}{2} \right)^2 = m l^2$

$y_2 = e + l \sin \varphi_2 = \frac{l}{2} \tan \varphi_2$

$\frac{1}{2} m l^2 \omega_1^2 = m g \frac{l}{2} \tan \varphi_2$

$\tan \varphi_2 = \frac{l \omega_1^2}{g} \Rightarrow \varphi_2 = \arctan \frac{l \omega_1^2}{g} = \arctan \frac{0,4 \cdot 8,333^2}{9,81}$

$\varphi_2 = 70,55^\circ$

