

**4.3. Rotačný pohyb telesa**

Príklad: Zotrvačník sa otáča otáčkami 1800 ot./min. v smere hodinových ručičiek. V čase  $t=0$  s. na zotrvačník začne pôsobiť premenlivý krútiaci moment, ktorý spôsobí spomalenie  $\alpha = 4t \text{ rad.s}^{-2}$ , kde  $t$  je čas v sekundách počas ktorých pôsobí krútiaci moment. Určte 1) čas  $t_1$ , za ktorý zotrvačník zníži svoju uhlovú rýchlosť na polovicu, kedy sa bude otáčať otáčkami 900 ot./min. 2) čas  $t_2$ , potrebný na zmenu smeru otáčania a 3) celkový počet otáčok (v smere aj v protismere hodinových ručičiek), ktoré zotrvačník vykoná počas prvých 14 sekúnd pôsobenia krútiaceho momentu.

D:  $n_0 = 1800 \text{ ot. min}^{-1}$

$n_1 = 900 \text{ ot. min}^{-1}$

$\alpha = 4t$

H:  $t_1, t_2, n_{\text{celk}}$

Riešenie: Protismeru hodinových ručičiek budeme považovať kladný zmysel otáčania

1)  $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 4t$

$$\int_{\omega_0}^{\omega} d\omega = \int_0^t 4t dt$$

$$[\omega]_{\omega_0}^{\omega} = \left[ 4 \frac{t^2}{2} \right]_0^t$$

$$\omega - \omega_0 = 2t^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega = \omega_0 + 2t^2};$$

Mínus preto, lebo sa otáča proti uvažovanému kladnému zmyslu otáčania

$$\omega_0 = -\frac{1800 \cdot 2\pi}{60} = -60\pi \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\omega_1 = -\frac{900 \cdot 2\pi}{60} = -30\pi \text{ rad.s}^{-1}$$

$$-30\pi = 60\pi + 2t_1^2 \quad \rightarrow \quad t = \sqrt{15\pi} = 6,86 \text{ s.}$$

2) Zotrvačník zmení zmysel otáčania tesne po tom, čo bude jeho uhlová rýchlosť nulová  $\omega = 0$

$$0 = -60\pi + 2t_2^2 \quad \rightarrow \quad t_2 = \sqrt{30\pi} = 9,71 \text{ s.}$$

3) Celkový počet otáčok vypočítame ako súčet otáčok do zastavenia a po zmene zmyslu otáčania

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + 2t^2, \quad \text{kde } \varphi \text{ je uhol pootočenia v radiánoch}$$

Zotrvačník urobí do zastavenia  $n_1$  otáčok:  $\int_0^{\varphi_1} d\varphi = \int_0^{t_2} \omega_0 + 2t^2 dt$

$$\varphi_1 = -60\pi \cdot 9,71 + \frac{2}{3} 9,71^3 = -1219,96 \text{ rad.}$$

$$n_1 = \frac{-1219,96}{2\pi} = -194,16 \text{ ot.}$$

Znamienko hovorí iba o smere otáčania

Po zmene zmyslu otáčania zotrvačník urobí  $n_2$  otáčok:  $\int_0^{\varphi_2} d\varphi = \int_{t_2}^{t_3} \omega_0 + 2t^2 dt$

$$\varphi_2 = -60\pi \cdot 14 + \frac{2}{3} 14^3 - \left( -60\pi \cdot 9,71 + \frac{2}{3} 9,71^3 \right) = 410,35 \text{ rad.}$$

$$n_2 = \frac{410}{2\pi} = 65,25 \text{ ot.}$$

Zotrvačník vykoná po 14 sekundách  $n_{\text{celk}} = n_1 + n_2 = 194,16 + 410,35 = 604,51$  otáčok.

Príklad:

Ťažké zotrvačenie s vonkajším polomerom  $R$  a vnútorným polomerom  $r$  sa otáča okolo osi  $z$  vplyvom momentu  $M$  tak, že pre jeho rotáciu platí:

$\varphi(t) = 8t^2$ . Vypočítajte veľkosť momentu  $M$ , ak je dané:

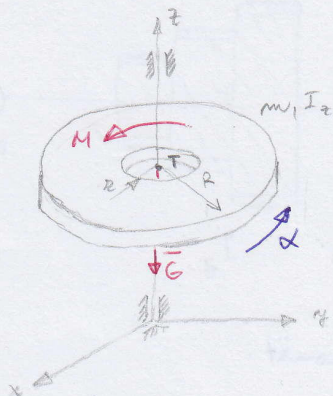
D:  $G = 400 \text{ N}$

$R = 0,9 \text{ m}$

$r = 0,7 \text{ m}$

$\varphi = 8t^2$

H:  $M$



Dre:  $I_z \cdot \alpha = \sum \tau_{iz}$

$I_z \alpha = M$

$I_z = \frac{m}{2} (R^2 + r^2) \quad ; \quad m = \frac{G}{g}$

$\varphi = 8t^2 \rightarrow \omega = \frac{d\varphi}{dt} = 16t \rightarrow \alpha = \frac{d\omega}{dt} = 16 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

$M = \frac{G}{2g} (R^2 + r^2) \cdot 16 = \frac{8G}{g} (R^2 + r^2)$

$M = \frac{8 \cdot 400}{9,81} (0,9^2 + 0,7^2) = 424,06 \text{ Nm}$



PRÍKLAD: VYPOČÍTADTE MOMENT ZOTRVAČNOSTI SKUPINY OBUBEDNÝCH KOLIES NA

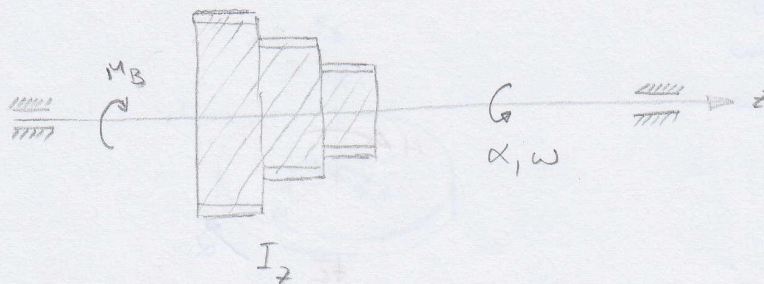
SPOLUČNOM HRIADLI, KTORÉ SA OTÁČA SPOTÁLENE VPLYVOM BRZDNÉHO MOMENTU  $M_B$  PRÍČON K JEHO ZASTAVENIU DÔJDE ZA ČAS  $t_1$ . URČTE POČET OTÁČOK DO ZASTAVENIA.

$$D: M_B = 8\pi \text{ Nm}$$

$$t_1 = 6 \text{ s}$$

$$\omega_0 = 12\pi \text{ rad/s}$$

$$M: I_z, n_1$$



$$I_z \cdot \alpha = -M_B$$

$$I_z = -\frac{M_B}{\alpha}$$

$$; \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \text{const.}$$

$$\int_{\omega_0}^0 d\omega = \int_0^{t_1} dt$$

$$\alpha = -\frac{\omega_0}{t_1}$$

$$I_z = -\frac{t_1 \cdot M_B}{-\omega_0} = -\frac{6 \cdot 8\pi}{-12\pi} = 4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\alpha = \frac{\omega d\omega}{d\varphi} = -\frac{\omega_0}{t_1}$$

$$\int_{\omega_0}^0 \omega d\omega = -\frac{\omega_0}{t_1} \int_0^{\varphi_1} d\varphi$$

$$-\frac{\omega_0^2}{2} = -\frac{\omega_0}{t_1} \varphi_1$$

$$\varphi_1 = \frac{\omega_0 \cdot t_1}{2} = 113,097 \text{ rad}$$

$$n_1 = \frac{\varphi_1}{2\pi} = \frac{\omega_0 \cdot t_1}{4\pi} = \frac{12\pi \cdot 6}{4\pi} = 18 \text{ otáčok}$$



Príklad: Plný rotor o hmotnosti  $G$  sa na začiatku otáča s  $\omega_0$ .

Vypočítajte veľkosť príťažlivých síl  $F_m$  brzdiacich čelov so  $t_1$ , aby sa rotor zastavil za čas  $t_1$ .

D:  $G = 3000 \text{ N}$

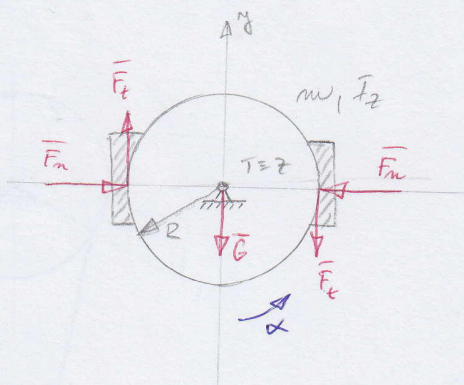
$\omega_0 = 2500 \text{ min}^{-1}$

$R = 0,3 \text{ m}$

$f = 0,8$

$t_1 = 6 \text{ s}$

H:  $F_m$



DR:  $I_2 \alpha = \sum M_{i2}$

$I_2 \alpha = -2F_t \cdot R$

$F_t = f \cdot F_m \rightarrow F_m = \frac{F_t}{f}$

$I_2 = \frac{1}{2} m R^2 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} R^2 = \frac{1}{2} \frac{3000}{9,81} \cdot 0,3^2 = 13,76 \text{ kg m}^2$

$\alpha = ? \quad F_m = \text{const} \Rightarrow F_t = \text{const} \Rightarrow \alpha = \text{const}.$

$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \text{const}, \rightarrow \int_{\omega_0}^0 d\omega = \alpha \int_0^{t_1} dt$

$\alpha = -\frac{\omega_0}{t_1} = -\frac{2\pi \omega_0}{60 t_1} = -\frac{2\pi \cdot 2500}{60 \cdot 6} = -43,63 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$

$F_t = -\frac{I_2 \alpha}{2R} = -\frac{13,76 (-43,63)}{2 \cdot 0,3} = 1000,6 \text{ N}$

$F_m = \frac{F_t}{f} = \frac{1000,6}{0,8} = 1251 \text{ N}$



PRÍKLAD: ZOTRVAČNÍKA SA ROZDELETA Z POKOJA NA KONČNÚ UHLOVÚ RÝCHLOSŤ

W<sub>1</sub> PODOBENÍM KONŠT. KRÚTACIEHO MOMENTU  $M_k$ , ĽTORÝ SA PŘEVAŠA TRECÍM SPOŠKOU S PRÍTLAČÍVOU SÍLOU  $F_n$ . VÝPČÍTAJTE MAXIM. KRÚTACÍ MOMENT A PRÁCU TRECÍCH SÍL SPOŠOU AK JE DÁVÉ:

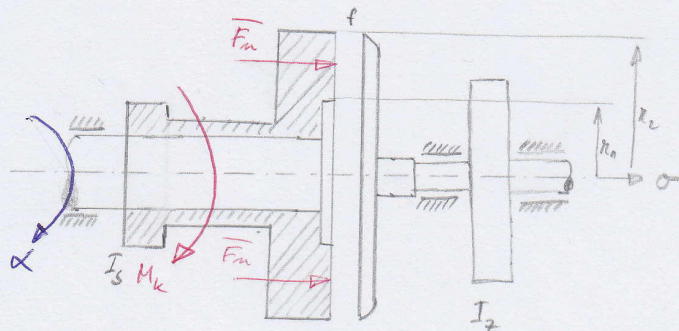
D:  $I_z, I_s$  [kgm<sup>2</sup>]

$\omega_0 = 0; \omega_1 \neq 0$  [rad.s<sup>-1</sup>]

$F_n$  [N];  $f$  [-]

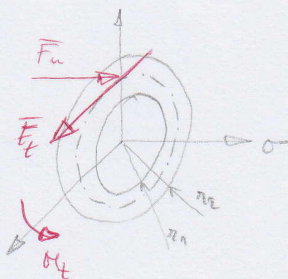
$r_1, r_2$  [m]

M:  $A_t, M_k$



DPR:  $I_o \alpha = \sum M_{io}$

$I_o \alpha = M_k = \text{moment trefcu s/l. } M_t \quad (M_t = M_k)$



$M_t = F_t \cdot r_s \quad ; \quad r_s = \frac{r_1 + r_2}{2}$

$F_t = F_n \cdot f$

$M_t = f \cdot F_n \cdot \frac{r_1 + r_2}{2} = \text{konšt.}$

$\alpha = \frac{M_k}{I_o} = \underbrace{f \cdot F_n \cdot \frac{r_1 + r_2}{2}}_{\text{konšt.}} \cdot \frac{1}{I_o} \quad ; \quad I_o = I_z + I_s$

PRÁCA TRECÍCH SÍL:  $A_t = ?$

$dA_t = \bar{F}_t \cdot dr$

$dA_t = F_t \cdot dr \cdot \omega \quad ; \quad dr = r_s d\varphi$

$dA_t = F_t \cdot r_s d\varphi = M_t d\varphi$

$d\varphi = ?$

$\alpha = \frac{M_k}{I_o} = \frac{\omega d\omega}{d\varphi} \Rightarrow d\varphi = \frac{I_o}{M_k} \omega d\omega$

$dA_t = M_t \frac{I_o}{M_k} \omega d\omega \quad ; \quad \text{lebo } M_k = M_t$

$A_t = I_o \int_0^{\omega_1} \omega d\omega = I_o \frac{\omega_1^2}{2}$

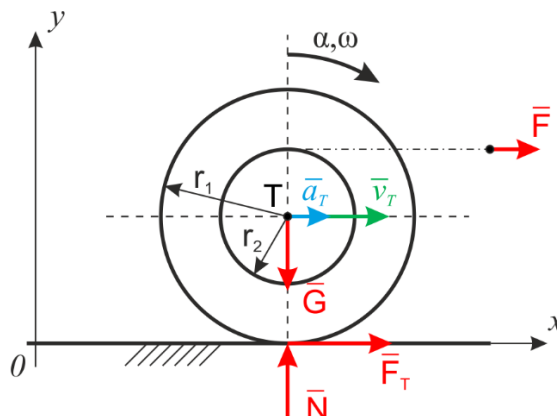
$A_t = (I_z + I_s) \frac{\omega_1^2}{2}$

PRÁCA TRECÍCH SÍL PRI ROZBEHU ZOTRVAČNÍKA NEZÁVISÍ OD PŘEVAŠANÉHO MOMENTU, ČI UŽ JE KONŠT. ALEBO PŘEDVHLIVÝ

**4.4. Všeobecný rovinný pohyb telesa**

Príklad: Dvojitý disk sa valí po horizontálnej rovine. Určte uhlovú rýchlosť disku a rýchlosť jeho ťažiska po prejení vzdialenosti  $l$ . Disk je ťahaný silou  $F$  na konci lana omotaného na menšom disku.

D:  $m_1 = 5 \text{ kg}$   
 $m_2 = 3 \text{ kg}$   
 $l = 1 \text{ m}$   
 $r_1 = 0,6 \text{ m}$   
 $r_2 = 0,4 \text{ m}$   
 $F = 20 \text{ N}$



H:  $v_{T1}, \omega_1$

$$x: \quad ma_x = F + F_T \quad (1) \quad F_T = ma_T - F$$

$$y: \quad 0 = N - G \quad (2)$$

$$M_T: \quad I_T \alpha = Fr_2 - F_T r_1 \quad (3) \quad \alpha = \frac{a_T}{r_1}$$

$$I_T = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2^2$$

$$(3) \quad I_T \frac{a_T}{r_1} = Fr_2 - ma_T r_1 + Fr_1$$

$$(I_T + mr_1^2) a_T = F(r_1 + r_2) r_1$$

$$a_T = \frac{F(r_1 + r_2) r_1}{I_T + mr_1^2}$$

$$a_T = \frac{v_T dv_T}{dx} = \text{konšt}$$

$$\int_0^{v_{T1}} v_T dv_T = a_T \int_0^l dx$$

$$\frac{v_{T1}^2}{2} = 2a_T l$$

$$v_{T1} = \sqrt{2a_T l}$$

$$\omega_1 = \frac{v_{T1}}{r_1}$$

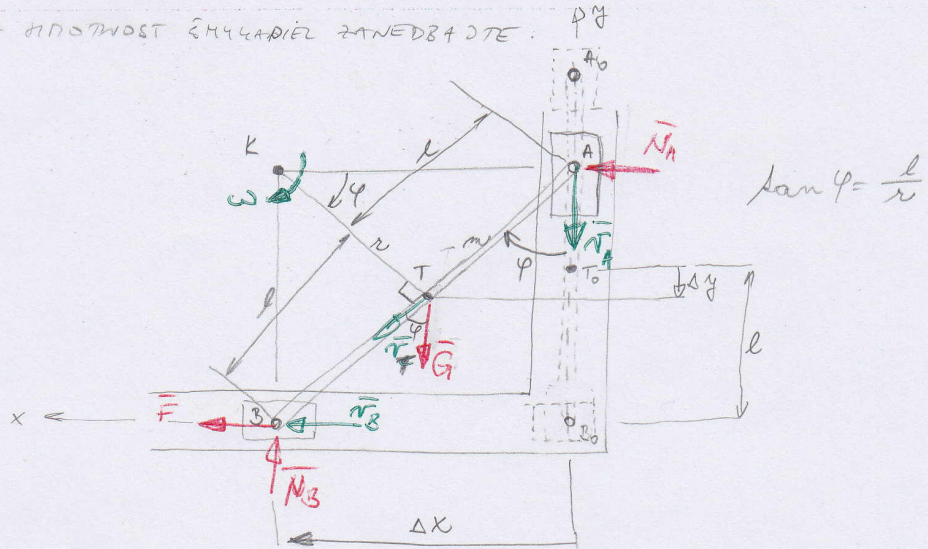


Príklad: Tuhá tyč je uložená podľa obrázku. Na začiatku je v rovnováhe, keď  $\varphi = 0$ . Koniec tyče B je ťahaný silou  $F$ . Určte uhlovú rýchlosť tyče v okamihu keď  $\varphi = 45^\circ$ . Trenie a hmotnosť šlykadiel zanedbajte.

D:  $m = 10 \text{ kg}$   
 $l = 0,4 \text{ m}$   
 $F = 50 \text{ N}$   
 $\varphi_1 = 45^\circ$

zP:  $\varphi_0 = 0$ ;  $\omega_0 = 0$ ;  $v_{T0} = 0$

H:  $\omega_1$



$$E_{k1} - E_{k0} = A$$

$$E_{k0} = 0, \text{ lebo } v_0 = 0 \text{ a } \omega_0 = 0$$

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m v_{T1}^2 + \frac{1}{2} I_T \omega_1^2; \quad v_{T1} = r \cdot \omega_1; \quad r = \overline{KT}$$

$$E_{k1} = \frac{1}{2} \underbrace{(I_T + m r^2)}_{I_k} \omega_1^2; \quad I_T = \frac{1}{12} m (2l)^2 = \dots = 0,5334 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$r = \frac{l}{\sin \varphi} = \dots = 0,4 \text{ m}$$

$$E_{k1} = \frac{1}{2} (0,533 + 10 \cdot 0,4^2) \omega_1^2 = 1,06 \omega_1^2$$

$$A = F \Delta x + G \Delta y$$

$$\Delta x = 2l \sin \varphi = 2 \cdot 0,4 \sin 45^\circ = 0,567 \text{ m}$$

$$\Delta y = l - l \cos \varphi = 0,4 - 0,4 \cos 45^\circ = 0,117 \text{ m}$$

$$A = 50 \cdot 0,567 + 10 \cdot 9,81 \cdot 0,117 = 39,78 \text{ J}$$

$$1,06 \omega_1^2 - 0 = 39,78$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{39,78}{1,06}} = 6,11 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \rightarrow v_{T1} = r \cdot \omega_1 = \dots = 2,44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

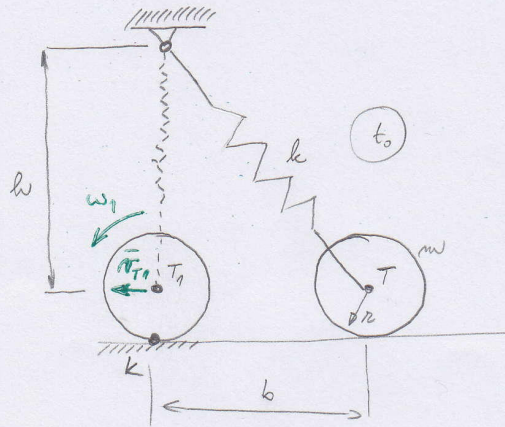


Príkład: Koleso s hmotnosťou  $m$  a polomerom zotrváčnosti  $r_g$  je pripojené k pružine s tuhosťou  $k$  a dĺžkou pružiny  $l_0$  (v nenatiahnutom stave). Určte uhlovú rýchlosť kolesa keď ťažisko  $T$  prejde vzdialenosť  $b$ . Koleso je púšťané z rovnováhy z polohy na obr.

D:  $m = 2 \text{ kg}$ ,  $r_g = 0,6 \text{ m}$   
 $b = 3 \text{ m}$ ,  $h = 4 \text{ m}$ ,  $r = 0,75 \text{ m}$   
 $k = 5 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ ,  $l_0 = 1 \text{ m}$

ZP:  $t_0 = 0$ :  $\pi_{T_0} = 0$ ,  $\omega_0 = 0$

H:  $\omega_1$



Zákon zachovania mech. energie

$$E_k + E_p = \text{konst.}$$

$$E_{k0} + E_{p0} = E_{k1} + E_{p1}$$

$$0 + \frac{1}{2} k \xi_0^2 = \frac{1}{2} I_k \omega_1^2 + \frac{1}{2} k \xi_1^2$$

$$\Rightarrow \omega_1^2 = \frac{k(\xi_0^2 - \xi_1^2)}{I_k}$$

$$\xi_0 = \sqrt{b^2 + h^2} - l_0 = 4 \text{ m}$$

$$\xi_1 = h - l_0 = 3 \text{ m}$$

$$I_k = I_T + m r^2 = m r_g^2 + m r^2 = m (r_g^2 + r^2)$$

$$I_k = 2(0,6^2 + 0,75^2) = 1,845 \text{ kg m}^2$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k(\xi_0^2 - \xi_1^2)}{I_k}} = \dots = 4,355 \text{ rad.s}^{-1}$$

- Polomer zotrváčnosti [ $r_g$  (radius of gyration)] telesa hmotnosti  $m$  k osi - definuje vzdialenosť, ktorú by musel mať hmotný bod od osi, aby mal k tejto osi rovnaký moment zotrváčnosti ako teleso